

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO**



**ALOCÇÃO ÓTIMA DE FILTROS E CAPACITORES NO
CONTEXTO DA QUALIDADE DA ENERGIA ELÉTRICA**

JOSÉ RUBENS MACEDO JR.

**AGOSTO
2002**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA ELÉTRICA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO

ALOCAÇÃO ÓTIMA DE FILTROS E CAPACITORES NO
CONTEXTO DA QUALIDADE DA ENERGIA ELÉTRICA

Dissertação apresentada por **José Rubens Macedo Jr.** à Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Banca examinadora:

José Wilson Resende, PhD (UFU) – Orientador

Paulo Sérgio Pereira, PhD (CONPROVE ENGENHARIA LTDA)

José Roberto Camacho, PhD (UFU)

Kleiber David Rodrigues, Dr (UFU)

Uberlândia, 5 de Agosto de 2002

ALOCAÇÃO ÓTIMA DE FILTROS E CAPACITORES NO CONTEXTO DA QUALIDADE DA ENERGIA ELÉTRICA

JOSÉ RUBENS MACEDO JR.

Dissertação apresentada por **José Rubens Macedo Jr.** à Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Prof. José Wilson Resende, PhD
Orientador

Prof. Alcimar Barbosa Soares
Coordenador do Curso de Pós-Graduação

À minha mãe Maria Sebastiana de Moura, aos meus avós maternos e à minha esposa Caroline Kirsten Reis, pela compreensão e carinho nestes momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela companhia em todos os momentos.

Ao professor José Wilson Resende meu agradecimento especial pela orientação, apoio e confiança depositada, indispensáveis para a concretização deste trabalho.

Ao professor José Roberto Camacho pelas colaborações na obtenção de material bibliográfico.

À Empresa Energética de Mato Grosso do Sul S.A. – ENERSUL – e a Espírito Santo Centrais Elétricas S.A. – ESCELSA – pelo fornecimento de dados técnicos de grande importância para este trabalho.

Aos demais colegas e funcionários da faculdade, da ENERSUL e da ESCELSA.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma metodologia para alocação ótima de filtros e capacitores no contexto da Qualidade da Energia Elétrica. A metodologia proposta baseia-se na modificação e aplicação da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas (TEIRE), desenvolvida por M. A. Laughon na década de 70. A TEIRE consiste-se, basicamente, na representação da matriz de admitância de rede de um determinado sistema elétrico em termos de seus autovalores e autovetores. Como resultado deste trabalho, tem-se uma metodologia simples e de aplicação direta para determinação de pontos ótimos para alocação de filtros harmônicos e capacitores em redes de energia elétrica.

Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas, alocação ótima, filtros harmônicos, capacitores.

ABSTRACT

This work presents a methodology to optimum placement of harmonic filters and capacitor banks in the context of Power Quality. The proposed methodology is established on modification of Inherent Structure Theory of Networks, developed by M. A. Laughton. The ISTN consists in the reformulation of admittance matrices in terms of their eigenvalues and eigenvectors. As a consequence of this work, results a simple and direct application methodology to identification of optimum busbars to allocation of harmonic filters and capacitor banks in electrical power systems.

Inherent Structure Theory of Networks, optimum allocation, harmonic filters, capacitor banks.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II – TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS	5
2.1 – Introdução	5
2.2 – Autovalores e Autovetores	6
2.3 – Aspectos gerais da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas	13
2.3.1 – Representação da topologia de um sistema elétrico em termos dos autovalores e autovetores de sua matriz admitância	13
2.3.2 – Estudo do comportamento das tensões através da análise dos autovalores.	28
2.3.3 – Correspondência entre tensões e autovalores quando da ocorrência de alterações na topologia do sistema elétrico	31
2.4 – Matriz de sensibilidade para autovalores	35
2.5 – Conclusão	42
CAPÍTULO III – ALOCAÇÃO ÓTIMA DE FILTROS HARMÔNICOS SINTONIZADOS PASSIVOS	43
3.1 – Introdução	43
3.2 – Aplicação da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas	45
3.2.1 – Passo 1 – Definição da ordem do filtro a ser alocado no sistema elétrico .	48
3.2.2 – Passo 2 – Montagem da matriz admitância da rede na ordem harmônica especificada	49
3.2.3 – Passo 3 – Cálculo dos autovalores e autovetores da matriz admitância de rede do sistema em análise	52
3.2.4 – Passo 4 – Identificação do autovalor de menor módulo	56
3.2.5 – Passo 5 – Identificação do autovetor associado ao autovalor de menor módulo	57
3.2.6 – Passo 6 – Cálculo da matriz de sensibilidade.....	58
3.2.7 – Passo 7 – Identificação da barra de alocação ótima para o filtro harmônico passivo sintonizado	60
3.3 – Aplicação de métodos empíricos de análise	62
3.4 – Conclusão	72

CAPÍTULO IV – ALOCAÇÃO ÓTIMA DE BANCOS DE CAPACITORES	73
4.1 – Introdução	73
4.2 – Alocação ótima de capacitores em alimentadores radiais de distribuição	75
4.2.1 – Caso A.1 – Sistema elétrico radial (análise através de método empírico) .	78
4.2.2 – Caso A.2 – Sistema elétrico radial (análise através da aplicação da TEIRE)	83
4.2.3 – Caso B.1 – Sistema elétrico em anel (análise através de método empírico)	87
4.2.4 – Caso B.2 – Sistema elétrico em anel (análise através da TEIRE)	93
4.2.5 – Caso C.1 – Sistema elétrico em anel modificado (análise através de método empírico)	98
4.2.6 – Caso C.2 – Sistema elétrico em anel modificado (análise através da TEIRE)	101
4.3 - Correspondência entre a teoria de estruturas inerentes a redes elétricas e a esparsidade da matriz admitância de rede dos sistemas elétricos.....	105
4.4 – Conclusão.	107
 CAPÍTULO V – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA NOVOS TRABALHOS .	108
 APÊNDICE A – NOÇÕES DE ÁLGEBRA MATRICIAL	112
A.1 – Dependência linear de vetores	112
A.2 – Normas de vetores	118
 APÊNDICE B – EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS	123
B.1 – Relações entre os autovalores e autovetores das matrizes de admitâncias e de impedâncias	123
B.2 – Demonstração matemática das equações fundamentais da teoria de estruturas inerentes a redes elétricas	129
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	137

LISTA DE FIGURAS

2.1 – Diagrama unifilar do sistema elétrico em análise para a frequência fundamental	14
2.2 – Diagrama de impedâncias do sistema elétrico em análise para a frequência de 300 Hz	18
2.3 – Variação percentual entre o maior e o menor elemento de cada autovetor	27
2.4 – Módulo dos elementos do autovetor θ_6	29
2.5 – Tensões harmônicas de 5 ^a ordem nas barras do sistema	30
2.6 – Elemento <i>shunt</i> conectado aos barramentos do sistema	31
2.7 – Variação percentual da tensão de 5 ^a ordem de acordo com a variação da barra de alocação do ramo RLC	33
2.8 – Módulo dos autovalores da matriz admitância	33
2.9 – Elementos da diagonal principal da matriz de sensibilidade relativa ao sistema elétrico da figura 2.2	41
3.1 – Fluxograma básico para aplicação da TEIRE para alocação ótima de filtros sintonizados em alimentadores de distribuição	46
3.2 – Diagrama unifilar do alimentador da SE ELDORADO 13,8 kV	47
3.3 – Matriz admitância de rede na frequência de 300Hz	51
3.4 – Matriz diagonal de autovalores	53
3.5 – Matriz de transição (autovetores)	55
3.6 – Módulo dos autovalores da matriz admitância de rede	56
3.7 – Matriz de Sensibilidade de barra	59
3.8 – Elementos de Sensibilidade Própria de Barra	60
3.9 – Elementos do filtro considerado para análise empírica	64
3.10 – Resposta em frequência da impedância do filtro	64
3.11 – Resposta em frequência do ângulo de defasagem da impedância do filtro	65

3.12 –	Espectro harmônico de correntes típico dos sistemas de distribuição expresso em percentagem da corrente fundamental	66
3.13 –	Tensões harmônicas de 5 ^a ordem quando da alocação do filtro em cada barra do sistema	67
3.14 –	DHT_V nas barras do sistema quando da alocação do filtro em cada barra do sistema	68
3.15 –	Variação percentual entre a maior e a menor tensão de 5 ^a harmônica nas barras do sistema quando da conexão do filtro em cada barramento individualmente	69
3.16 –	Variação percentual entre a maior e a menor DHT_V nas barras do sistema quando da conexão do filtro em cada barramento individualmente	70
3.17 –	Comparação entre os resultados obtidos através da aplicação da TEIRE e o método empírico para a tensão de 5 ^a harmônica em cada barramento	71
3.18 –	Comparação entre os resultados obtidos através da aplicação da TEIRE e o método empírico para a DHT_V em cada barramento	71
4.1 –	Fluxograma de aplicação da TEIRE para alocação ótima de bancos de capacitores	77
4.2 –	Diagrama unifilar do alimentador em estudo	78
4.3 –	Perfis de tensão ao longo do alimentador	80
4.4 –	Perdas Joule no alimentador x barra de alocação do banco de capacitores	81
4.5 –	Tensão média nas barras x barra de alocação do banco de capacitores	82
4.6 –	Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 13	83
4.7 –	Módulo dos autovalores da matriz admitância	84
4.8 –	Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância	84
4.9 –	Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade	85

4.10 – Comparação entre os resultados encontrados. (a) Módulo das tensões médias nas barras obtidas por método empírico; (b) Módulo dos elementos do autovetor associado e (c) Módulo dos elementos de sensibilidade de barra	86
4.11 – Diagrama unifilar do sistema elétrico em estudo	88
4.12 – Perfis de tensão nas barras do sistema elétrico	90
4.13 – Perdas Joule nas linhas do sistema elétrico x barra de alocação do banco de capacitores	90
4.14 – Tensão média nas barras x barra de alocação do banco de capacitores	91
4.15 – Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 12	92
4.16 – Módulo dos autovalores da matriz admitância	94
4.17 – Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância	95
4.18 – Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade	96
4.19 – Comparação entre os resultados encontrados. (a) Módulo das tensões médias nas barras obtidas por método empírico; (b) Módulo dos elementos do autovetor associado e (c) Módulo dos elementos de sensibilidade de barra	97
4.20 – Diagrama unifilar do sistema em anel modificado	98
4.21 – Perdas Joule nas linhas do sistema elétrico x Barra de alocação do banco de capacitores	100
4.22 – Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 6	101
4.23 – Módulo dos autovalores da matriz admitância	102
4.24 – Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância	103
4.25 – Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade	104

LISTA DE TABELAS

2.1 – Modelos adotados para os elementos do sistema elétrico	17
2.2 – Admitâncias dos elementos do sistema elétrico	18
2.3 – Variação percentual entre os elementos do <i>i-ésimo</i> autovetor	27
2.4 – Tensões de 5 ^a harmônica nas barras do sistema antes e depois da inserção do ramo RLC	32
3.1 – Dados de barra do alimentador	49
3.2 – Dados de linha do alimentador	50
4.1 – Dados de barra do alimentador	79
4.2 – Dados de linha do alimentador	79
4.3 – Dados de barra do sistema elétrico em anel	89
4.4 – Dados de linha do sistema elétrico em anel	89
4.5 – Dados de barra do sistema elétrico em anel modificado	99
4.6 – Dados de linha do sistema elétrico em anel modificado	99
4.7 – Comparação entre os casos estudados	105

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Os estudos de alocação ótima de elementos em derivação nos sistemas elétricos de potência contam de longa data. Entre os anos de 1965 e 1972 vários trabalhos foram publicados com o tema “Alocação ótima de bancos de capacitores”. Esses trabalhos iniciais, entretanto, utilizavam técnicas elementares como a pioneira “Técnica da Tentativa e Erro” que consistia-se, basicamente, numa metodologia empírica onde vários estudos eram realizados em sequência de modo que, no final destes estudos, observa-se aquele para o qual foram obtidos os melhores resultados. A referência [7] ilustra muito bem esta metodologia. Neste trabalho, o autor, basicamente, estabelece uma automatização de um *software* de fluxo de carga tradicional, de forma a executar automaticamente sucessivos estudos, onde, ao final é verificada a barra de melhor performance para o banco de capacitores, ou, em outras palavras, a barra para a qual a alocação do banco de capacitores minimiza as perdas elétricas em todo o sistema elétrico considerado.

Ao longo dos anos (principalmente entre 1980 e 1990), o problema da alocação ótima de bancos de capacitores ganhou novas ferramentas de análise, muito mais precisas e, ao mesmo tempo, mais complexas que aquelas até então utilizadas pelos planejadores dos sistemas elétricos.

A prática mais comum, a partir de então, passou a ser a utilização da programação não-linear para solução dos problemas relacionados à ótima alocação de bancos de capacitores. As referências [8] e [9] representam muito

bem esta fase da evolução das metodologias relacionadas ao problema da alocação ótima.

Na década de 90, novas e ousadas formulações e metodologias foram propostas para substituição dos métodos relacionados à já tradicional programação não-linear. Dentre eles, pode-se ressaltar a moderna técnica utilizando-se de lógica *fuzzy* para alocação de bancos de capacitores, assim como, a abordagem Eurística apresentada na referência [10].

Sob o aspecto da alocação ótima de filtros harmônicos passivos, muito pouco foi desenvolvido até os dias atuais. Os poucos trabalhos relacionados a estes processos são apresentados nas referências [2] e [11]. A metodologia proposta na referência [11], por exemplo, relembra os primórdios das ferramentas para alocação ótima de elementos em derivação nos sistemas elétricos, uma vez que a mesma também utiliza a técnica elementar de tentativa e erro.

Em meio ao período de evolução dos processos e métodos de alocação ótima de elementos passivos em derivação, foi proposta em 1978, por M. A. LAUGHTON [1], a Teoria de Estruturas Inerente a Redes Elétricas – TEIRE. Esta teoria foi até então aplicada somente para problemas na frequência fundamental das redes elétricas, como nos processos de estimação dos perfis de tensão nos barramentos de uma rede elétrica, estimativa dos níveis de curto-circuito ao longo de alimentadores de distribuição e, até mesmo, de forma um pouco tímida, na alocação ótima de bancos de capacitores.

O objetivo principal deste trabalho é dar continuidade às formulações propostas por M. A. LAUGHTON na solução de problemas envolvendo alocação de bancos de capacitores e, principalmente, reformular a teoria por ele proposta, de forma a ser possível a aplicação da mesma em problemas de alocação ótima de filtros harmônicos passivos.

Para este propósito, o presente trabalho se apresenta em 05 (cinco) capítulos divididos conforme mostrado a seguir:

- **CAPÍTULO 1** – Introdução ao problema geral da alocação ótima de capacitores e filtros harmônicos passivos. Aqui serão citadas, em ordem cronológica, as principais metodologias desenvolvidas ao longo dos anos para solucionar os problemas de ótima alocação de elementos em derivação.
 - **CAPÍTULO 2** – Neste capítulo será apresentada toda a formulação matemática original, proposta por M. A. LAUGHTON em 1978, assim como, as modificações propostas para utilização da ferramenta em estudos de alocação ótima de filtros harmônicos passivos.
 - **CAPÍTULO 3** - Apresentará uma aplicação prática da TEIRE na alocação ótima de filtros harmônicos passivos em derivação. A partir de um sistema elétrico real, a teoria será aplicada de forma a se identificar, de modo claro e objetivo, cada um dos passos que a compõem.
 - **CAPÍTULO 4** – Neste capítulo a TEIRE será aplicada na alocação ótima de bancos de capacitores para minimização de perdas elétricas. Para este propósito, 3 (três) casos serão analisados. Ao final, a exatidão da TEIRE será testada considerando-se várias situações diferentes de topologia dos sistemas elétricos analisados.
 - **CAPÍTULO 5** – Este é o capítulo de fechamento do trabalho. Nele serão apresentados todos os procedimentos desenvolvidos em cada capítulo, com os respectivos méritos e ressalvas cabíveis.
 - **APÊNDICE A** – Apresenta as noções básicas da álgebra matricial.
 - **APÊNDICE B** – Apresenta a demonstração matemática das equações fundamentais da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas.
-

A Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas pode ser aplicada a outros processos envolvendo problemas relacionados à sensibilidade de elementos ou, ainda, à alocação ótima de outros equipamentos pertinentes aos sistemas elétricos de potência.

Desta forma, este trabalho, ao mostrar a aplicabilidade da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas nos estudos de ótima alocação de filtros harmônicos passivos e bancos de capacitores, não extingue várias outras possíveis aplicações dessa ferramenta de análise. Ao contrário, este trabalho pretende contribuir para que esta técnica, uma vez conhecida, possa ser aplicada também a outras áreas, como as de engenharia mecânica e civil.

CAPÍTULO 2

TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS

2.1 – INTRODUÇÃO

A Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas consiste em uma importante ferramenta para análise dos sistemas de energia elétrica. Desenvolvida por M.A. Laughon [1], essa teoria tem sido aplicada na solução dos mais variados problemas relacionados aos sistemas elétricos de potência. Dentre as várias aplicações possíveis, pode-se citar: análise da sensibilidade de tensão, controle de tensão, análise do nível de faltas nos sistemas elétricos, entre outras.

Baseada no domínio da frequência, a Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas (TEIRE), até recentemente, abordava tão somente a frequência fundamental dos sistemas de energia. Por outro lado, com o passar dos anos e, principalmente, com o surgimento de novas tecnologias, os sistemas elétricos passaram a ser analisados também em frequências múltiplas da fundamental (as chamadas frequências harmônicas). Para esses estudos, várias são as metodologias de análise atualmente existentes.

A utilização da Teoria Inerente à Estrutura na solução dos problemas associados às frequências harmônicas, somente foi investigada recentemente

através dos trabalhos de G. Carpinelli [2][3], os quais abordam estudos de alocação ótima de filtros harmônicos passivos sintonizados.

O presente trabalho tem por objetivo a implementação da TEIRE como uma ferramenta de análise de problemas relacionados à Qualidade da Energia Elétrica, onde as frequências harmônicas também estão presentes. Neste trabalho, a aplicação da Teoria não se resumirá simplesmente na alocação ótima de filtros sintonizados, como abordado nas referências [2] e [3], mas incluirá também a análise da alocação ótima de bancos de capacitores na frequência fundamental.

O entendimento da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas requer do leitor um conhecimento básico de álgebra matricial. Visando suprir este requisito básico, o apêndice A apresenta um resumo acerca da Análise Vetorial-Matricial, assim como, os principais axiomas e formulações matemáticas importantes no entendimento deste trabalho.

O conhecimento teórico acerca dos autovalores e autovetores de matrizes consiste no mais importante fundamento da TEIRE. Assim sendo, a próxima seção fornecerá as bases essenciais para a compreensão destes tópicos.

2.2 – AUTOVALORES E AUTOVETORES

Um *autovalor*, ou *valor característico*, de uma matriz $n \times n$ $A = [a_{jk}]$ é um número real ou complexo, designado por λ , tal que a equação vetorial (2.1) tenha como solução um vetor x , cujas componentes sejam não-nulas, consistindo, dessa forma, na chamada solução “não-trivial”.

$$A.x = \lambda.x \tag{2.1}$$

O vetor x , na equação (2.1), é chamado de *autovetor* correspondente (ou associado) ao autovalor λ . Ao conjunto de todos os n autovalores da matriz A dá-se a denominação de *espectro de A* .

Nota-se que a equação vetorial (2.1), denominada *equação fundamental*, é não-linear, uma vez que a mesma envolve o produto de duas incógnitas, λ e x . Se uma das duas incógnitas fosse conhecida, a equação (2.1) tornar-se-ia linear.

Buscando-se uma nova representação para a equação (2.1), procede-se à transferência do termo $\lambda.x$ para o lado esquerdo da igualdade, resultando em (2.2).

$$(A - \lambda).x = 0 \tag{2.2}$$

Entretanto, essa nova representação apresenta-se um tanto confusa, uma vez que tem-se uma subtração entre uma matriz e um escalar. Para solucionar este problema, utiliza-se o elemento neutro da multiplicação de matrizes, ou seja, a matriz identidade (de mesma ordem que a matriz A). Assim, substitui-se o termo $\lambda.x$ por $\lambda.I.x$, de modo que a equação (2.1) possa ser definitivamente rescrita como (2.3).

$$(A - \lambda.I).x = 0 \tag{2.3}$$

Da mesma forma que a equação (2.1), de acordo com a definição de autovalor, a equação (2.3) deverá ter uma solução não-trivial. Isto equivale a dizer que a matriz resultante da subtração $A - \lambda.I$ deve ser singular, ou seja, o determinante da matriz $(A - \lambda.I)$ deve ser nulo.

Ainda em relação à equação (2.3), pode-se, nesse momento, atribuir uma nova definição ao termo *autovalor*. Dessa forma, o número λ será um *autovalor* da matriz A se, e somente se,

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é denominada *equação característica* da matriz A .

A exigência de que $\det(A - \lambda I) = 0$, retrocede à questão da dependência linear (no caso, dos vetores formados pelas colunas da matriz $(A - \lambda I)$). Nesse contexto, rescrevendo-se $(A - \lambda I)x = 0$, para uma maior simplicidade de representação, tem-se que as colunas da nova matriz B são designadas como sendo os vetores coluna, B_1, B_2, \dots, B_n . Assim, a equação (2.3) pode ser reescrita como a seguir.

$$[B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n]x = 0 \quad (2.5)$$

onde o vetor x tem componentes x_1, x_2, \dots, x_n , de tal forma que se permite escrever a equação (2.5) da forma indicada em (2.6).

$$B_1 \cdot x_1 + B_2 \cdot x_2 + \dots + B_n \cdot x_n = 0 \quad (2.6)$$

Uma condição suficiente para que o determinante da matriz B seja nulo é que os vetores B_1, B_2, \dots, B_n sejam linearmente dependentes, fato esse abordado no apêndice A.

Buscando-se ter um padrão único de representação das grandezas, doravante neste texto, os autovalores serão representados pelo símbolo λ e seu autovetor correspondente, pelo símbolo θ .

EXEMPLO NUMÉRICO:

Com o intuito de ilustrar os conceitos de autovalores e autovetores, considere a matriz A , apresentada abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Para o cálculo dos autovalores da matriz A , utiliza-se sua equação característica, apresentada em (2.4). Assim, tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Da equação (2.7), resulta

$$(-2-\lambda)(-3-\lambda) - (1)(1) = 0 \quad (2.8)$$

Após simplificação, tem-se

$$\lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0 \quad (2.9)$$

O polinômio obtido em (2.9) é denominado *polinômio característico*.

Resolvendo-se a equação do segundo grau, representada pelo polinômio característico (2.9), obtém-se:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1,38 \\ \lambda_2 &= -3,62\end{aligned}\tag{2.10}$$

Portanto, a matriz A possui dois autovalores distintos, dados em (2.10). Em seguida, para se obter os autovetores correspondentes aos autovalores calculados, considera-se cada autovalor separadamente. Assim, tomando-se inicialmente o autovalor λ_1 , e utilizando-se a equação dada em (2.3), tem-se:

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - (-1,38)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.11}$$

Assim, da equação (2.11), resulta:

$$\begin{bmatrix} -0,62 & 1 \\ 1 & -1,62 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{2.12}$$

onde x_1 e x_2 são as componentes do autovetor θ_1 .

Escrevendo-se a equação vetorial, obtida em (2.12), sob a forma de um sistema de equações, tem-se:

$$\begin{cases} -0,62x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 1,62x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Como resultado do sistema de equações em (2.13), tem-se $x_1 = -0,8507$ e $x_2 = -0,5257$. Dessa forma, finalmente, pode-se escrever o autovetor θ_1 como sendo

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} -0,8507 \\ -0,5257 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Para a obtenção do segundo autovetor, associado ao autovalor λ_2 , retorna-se à equação (2.13), de onde resulta:

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - (-3,62) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

que pode ser rescrita como:

$$\begin{bmatrix} 1,62 & 1 \\ 1 & 0,62 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

ou ainda, na forma de sistema de equações, tem-se

$$\begin{cases} 1,62x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 0,62x_2 = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Como resultado do sistema de equações em (2.17), pode-se escrever o autovetor θ_2 como sendo

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} 0,5257 \\ -0,8507 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Essa seção apresentou os principais fundamentos básicos acerca da teoria de autovalores e autovetores necessários à compreensão da Teoria Inerente à Estrutura. A seguir, essas definições serão utilizadas no desenvolvimento da referida teoria, proporcionando-se, assim, uma ferramenta de grande utilidade na solução de diversos problemas relacionados aos sistemas de energia elétrica.

2.3 – ASPECTOS GERAIS DA TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS

2.3.1 – REPRESENTAÇÃO DA TOPOLOGIA DE UM SISTEMA ELÉTRICO EM TERMOS DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES DE SUA MATRIZ ADMITÂNCIA

Os cálculos que envolvem tensões e correntes em sistemas elétricos requerem, em geral, o conhecimento da correspondente matriz admitância da rede. A Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas também utiliza a matriz admitância como principal elemento de análise.

Nessa seção, será mostrado um desenvolvimento que levará à representação da matriz admitância de uma rede elétrica em termos de seus autovalores e autovetores. Tal análise será de grande importância no desenvolvimento de estudos, através da TEIRE, de alocação ótima de bancos de capacitores e filtros harmônicos sintonizados, assim como, na análise da sensibilidade dos barramentos de uma rede quando da ocorrência de afundamentos momentâneos de tensão.

Nesse contexto, vale a pena lembrar que qualquer perturbação na topologia de um sistema elétrico, como a inserção de um ramo *shunt* ou de uma nova linha, provocará alterações na matriz admitância da rede. Dessa forma, os autovalores e autovetores correspondentes sofrerão alterações e, por conseguinte, indicarão modificações na sensibilidade dos barramentos do sistema elétrico. Visando uma maior objetividade na apresentação deste desenvolvimento, o mesmo será realizado através da utilização de um exemplo prático.

Como ponto de partida, considera-se o sistema elétrico apresentado na figura 2.1, cujas impedâncias estão expressas em grandezas por unidade na base de 100MVA.

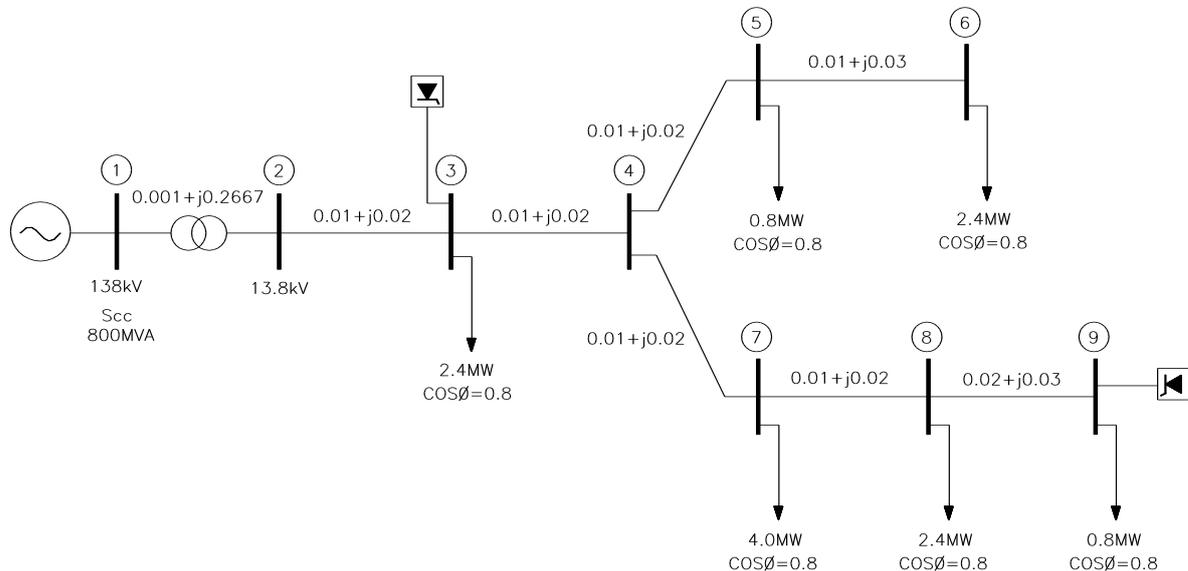


Figura 2.1 – Diagrama unifilar do sistema elétrico em análise para a frequência fundamental.

No contexto dos sistemas elétricos, a TEIRE utiliza, como matriz base para análise, a *matriz admitância* da rede. Esta, como se sabe, é constituída das porções passivas do sistema. É a partir dessa matriz que a teoria se aplica aos mais diversos segmentos.

A matriz admitância será simétrica em estrutura e valor, desde que no sistema elétrico considerado não existam transformadores defasadores [4]. Essa simetria da matriz admitância proporcionará uma facilidade extra no cálculo dos autovalores e autovetores correspondentes, uma vez que matrizes simétricas, de elementos reais, terão todos seus autovalores reais. No que se refere à dimensão da matriz admitância, tem-se que a mesma será uma matriz quadrada de ordem igual ao número de barras do sistema elétrico. Assim, para o sistema

de 9 barras apresentado na figura 2.1, ter-se-ia uma matriz quadrada de ordem 9, conforme apresentado em (2.19).

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} & y_{19} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} & y_{29} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} & y_{39} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} & y_{46} & y_{47} & y_{48} & y_{49} \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} & y_{56} & y_{57} & y_{58} & y_{59} \\ y_{61} & y_{62} & y_{63} & y_{64} & y_{65} & y_{66} & y_{67} & y_{68} & y_{69} \\ y_{71} & y_{72} & y_{73} & y_{74} & y_{75} & y_{76} & y_{77} & y_{78} & y_{79} \\ y_{81} & y_{82} & y_{83} & y_{84} & y_{85} & y_{86} & y_{87} & y_{88} & y_{89} \\ y_{91} & y_{92} & y_{93} & y_{94} & y_{95} & y_{96} & y_{97} & y_{98} & y_{99} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Verificam-se duas regras simples para a determinação dos elementos y_{ij} da matriz admitância:

- os elementos diagonais y_{ii} são obtidos pela soma algébrica de todas as admitâncias incidentes no nó i ;
- os elementos fora da diagonal, $y_{ij} = y_{ji}$, são obtidos das admitâncias que ligam os nós i e j , com sinal negativo.

Assim, para o sistema de energia apresentado na figura 2.1, ter-se-ia a seguinte topologia matricial:

$$Y = \begin{bmatrix} (y_1 + y_{12}) & -y_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y_{12} & (y_{12} + y_{23}) & -y_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_{23} & (y_3 + y_{23} + y_{34}) & -y_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{34} & (y_{34} + y_{45} + y_{47}) & -y_{45} & 0 & -y_{47} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{45} & (y_5 + y_{45} + y_{56}) & -y_{56} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{56} & (y_6 + y_{56}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_{47} & 0 & 0 & (y_7 + y_{47} + y_{78}) & -y_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{78} & (y_8 + y_{78} + y_{89}) & -y_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y_{89} & (y_9 + y_{89}) \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

onde,

y_{ij} = admitância da linha entre as barras i e j ;

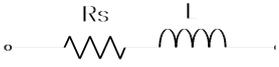
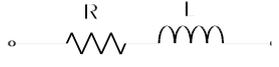
y_i = admitância do elemento *shunt* conectado à barra i .

A representação por impedâncias (ou admitâncias) das cargas e geradores é típica dos estudos de curto-circuito e de penetração harmônica, que envolvem análises onde tensões e correntes se relacionam linearmente através das equações matriciais $[V] = [Z].[I]$ ou $[I] = [Y].[V]$. A TEIRE também relaciona grandezas de maneira linear. Isto pode levar à idéia de que a mesma é inadequada como ferramenta de análise dos sistemas elétricos na frequência fundamental, o que não é verdade. A utilização dessa teoria na frequência fundamental será abordada no capítulo 4 do presente trabalho, que trata da alocação ótima de bancos de capacitores.

Neste capítulo, a Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas será apresentada ao leitor na frequência de 300Hz (5^a harmônica) em um estudo de penetração harmônica, utilizando-se o sistema elétrico da figura 2.1.

Como ponto de partida para a análise do sistema da figura 2.1 na frequência de 5^a ordem, os elementos *shunt* e série do mesmo serão representados como impedâncias, na frequência de 300Hz. Em um estudo de penetração harmônica, os elementos do sistema elétrico como cargas, geradores, transformadores e linhas podem ser representados através de variados modelos, todos consistindo de diferentes arranjos de impedâncias. Para a presente análise, visando-se uma maior simplificação, serão utilizados os modelos básicos mostrados na tabela 2.1, a seguir. No entanto, os estudos e análises que se seguem não seriam invalidados se modelos mais complexos fossem assumidos.

Tabela 2.1 – Modelos adotados para os elementos do sistema elétrico.

COMPONENTE	MODELO ADOTADO	SIGNIFICADO DAS VARIÁVEIS	COMENTÁRIO
TRANSFORMADOR		R_S = Resistência dos enrolamentos; L = Indutância de dispersão.	Esta é a representação mais simples de um transformador, na qual considera-se apenas a indutância de dispersão e a resistência dos enrolamentos.
LINHA		R = Resistência série da linha; L = Indutância série da linha.	Modelo utilizado para representação de linhas curtas, nas quais o efeito capacitivo não se faz presente.
GERADOR		R = Resistência série; L = Indutância série.	O comportamento de um gerador síncrono sujeito à frequências harmônicas é bastante complexo, devido ao modo com que o fluxo magnético no entreferro varia com o tempo. Para os propósitos deste exemplo prático, foi considerada a representação sugerida por Pesonen et al. [5].
CARGA		R = Resistência série; L = Indutância série.	As cargas podem ser representadas das mais variadas maneiras, dependendo de suas características. Entretanto, para o caso específico, as mesmas serão consideradas como sendo motores de indução representados exatamente como o modelo proposto para geradores.

Utilizando-se os modelos dos elementos apresentados na tabela 2.1, o sistema elétrico da figura 2.1 passa a ser considerado conforme a nova topologia apresentada na figura 2.2. Apenas os valores das reatâncias dos elementos foram recalculados para a frequência de 300Hz, uma vez que não se está considerando, neste exemplo, o efeito pelicular das resistências dos elementos do sistema.

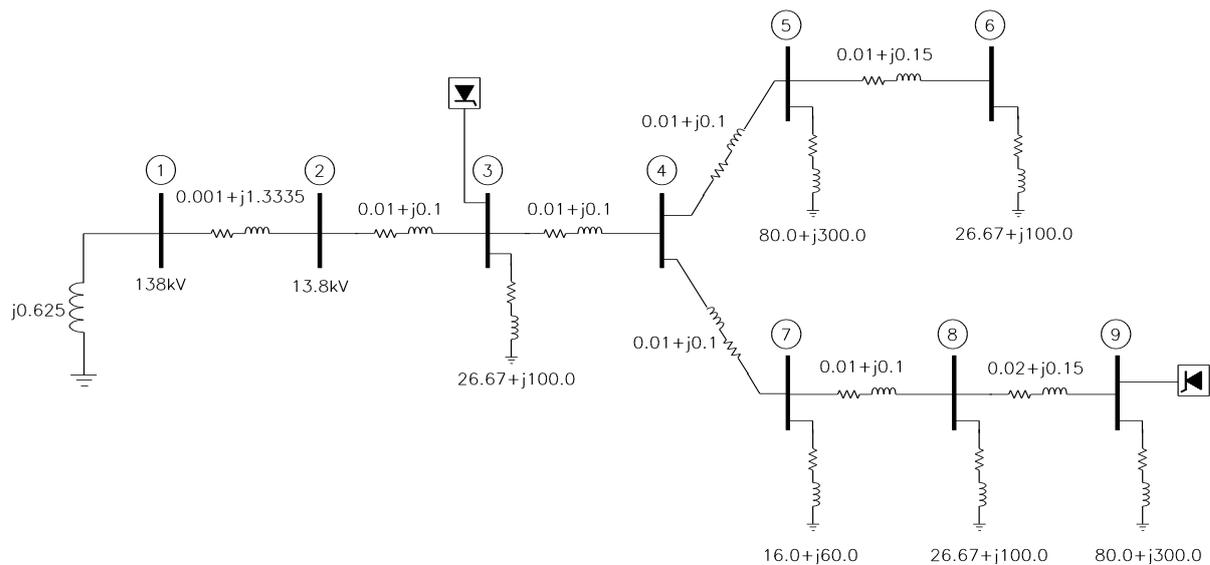


Figura 2.2 – Diagrama de impedâncias do sistema elétrico em análise para a frequência de 300Hz.

Para se obter os valores numéricos dos elementos da matriz Y deve-se converter as impedâncias dos elementos do sistema em valores de admitância (lembrando-se que a admitância de um elemento do sistema é igual ao inverso da impedância do mesmo). Os valores de admitância para o sistema considerado são apresentados na tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Admitâncias dos elementos do sistema elétrico.

ADMITÂNCIA DOS RAMOS			
Barra de origem	Barra de destino	Impedância(pu)	Admitância(pu)
1	2	0,001+j1,3335	0,00056-j0,75
2	3	0,01+j0,1	0,9901-9,901
3	4	0,01+j0,1	0,9901-9,901
4	5	0,01+j0,1	0,9901-9,901
5	6	0,01+j0,15	0,4425-j6,637
4	7	0,01+j0,1	0,9901-9,901
7	8	0,01+j0,1	0,9901-9,901
8	9	0,02+j0,15	0,8734-j6,5502
ADMITÂNCIA DAS BARRAS			
Barra	Impedância(pu)	Admitância(pu)	
1	j0,625	-j1,6	
2	Infinita	0	
3	26,67+j100,0	0,00249-j0,009336	
4	Infinita	0	
5	80,0+j300,0	0,0008299-j0,003112	
6	26,67+j100,0	0,00249-j0,009336	
7	16,0+j60,0	0,004149-j0,01556	
8	26,67+j100,0	0,00249-j0,009336	
9	80,0+j300,0	0,0008299-j0,003112	

Considerando-se, portanto, os valores de admitância de 5ª ordem apresentados na tabela 2.2, pode-se escrever a matriz de admitâncias Y em termos de seus valores numéricos, conforme verificado em (2.21), onde todos os valores estão expressos em grandezas por unidade, na base de 100 MVA.

$$Y = \begin{bmatrix} 0,0006 - j2,3499 & -0,0006 + j0,7499 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0006 + j0,7499 & 0,9907 - j10,6509 & -0,9901 + j9,9010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,9827 + j19,8113 & -0,9901 + j9,9010 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9901 + j9,9010 & 2,9703 - j29,7030 & -0,9901 + j9,9010 & 0 & -0,9901 + j9,9010 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,9901 + j9,9010 & 1,4334 - j16,5413 & -0,4425 + j6,6372 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4425 + j6,6372 & 0,4450 - j6,6465 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,9901 + j9,9010 & 0 & 0 & 0 & 1,9843 - j19,8175 & -0,9901 + j9,9010 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,9901 + j9,9010 & 1,8660 - j16,4605 & -0,8734 + j6,5502 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8734 + j6,5502 & 0,8742 - j6,5534 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Uma vez obtida a matriz admitância do sistema elétrico em estudo, pode-se proceder à análise da sensibilidade da rede, através da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas. A base desse desenvolvimento é a equação (2.22). A TEIRE indicará, de maneira qualitativa, a sensibilidade de um determinado barramento do sistema elétrico quando da ocorrência de alguma perturbação na rede.

$$[V] = [Z][I] \quad (2.22)$$

Nessa equação, tem-se que:

$[V]$ é a matriz de tensões;

$[I]$ é a matriz de correntes;

$[Z]$ é a matriz de impedâncias da rede.

Como se sabe, a matriz de admitâncias da rede $[Y]$ é igual a inversa da matriz de impedâncias, ou seja, $[Z] = [Y]^{-1}$. Dessa forma, a equação (2.22) pode ser reescrita conforme a equação (2.23).

$$[V] = [Y]^{-1} \cdot [I] \quad (2.23)$$

Pela Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas a sensibilidade de uma rede de energia elétrica pode ser verificada através da análise da topologia do sistema elétrico, considerando-se, para este propósito, a matriz admitância da rede. Da equação (2.23), verifica-se que a tensão, em um determinado barramento, é diretamente dependente da configuração da matriz admitância $[Y]$.

O princípio básico da TEIRE é a remodelação da matriz admitância da rede em termos de seus autovalores e autovetores. Assim, considerando-se a representação matemática indicada em [3], a matriz Y pode ser escrita em termos de seus autovalores e autovetores, conforme a equação (2.24).

$$Y = (P) \text{diag}(\lambda) (P)^{-1} \quad (2.24)$$

Onde,

Y = matriz admitância da rede;

$\text{diag}(\lambda)$ = matriz diagonal de autovalores da matriz Y ;

P = matriz de transição, cujas colunas são os autovetores da matriz Y .

A matriz $diag(\lambda)$ é chamada matriz diagonal. Nesta matriz, todos os elementos que não pertençam à diagonal principal são nulos. Por outro lado, os elementos da diagonal principal são formados pelos autovalores da matriz admitância. Assim, para o sistema elétrico de nove barras, da figura 2.2, tem-se a estrutura matricial mostrada na equação (2.25).

$$diag(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Onde λ_i é o i -ésimo autovalor da matriz admitância.

A matriz de transição P é representada conforme a equação (2.26).

$$P = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4 \quad \theta_5 \quad \theta_6 \quad \theta_7 \quad \theta_8 \quad \theta_9] \quad (2.26)$$

Onde θ_i é o i -ésimo autovetor, no caso um vetor coluna, da matriz admitância.

A demonstração matemática da equação (2.24) pode ser verificada no apêndice B. Por agora, entretanto, com o intuito de verificar a igualdade apresentada em (2.24), considere a matriz Y , apresentada na equação (2.27).

EXEMPLO NUMÉRICO:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

De acordo com a teoria apresentada na seção 2.2, calculam-se os autovalores e os autovetores da matriz Y considerada. A matriz Y , de segunda ordem, tem como autovalores os elementos -3 e 5 . Tem-se, ainda, que de acordo com a equação (2.24) os autovalores da matriz Y deverão ser apresentados segundo a topologia de uma matriz diagonal, conforme pode ser mostrado em (2.28).

$$diag(\lambda) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Como verificado na seção 2.2, cada autovalor λ está associado um autovetor θ . Desse modo, da equação (2.3) tem-se, para $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 5$, os seguintes autovetores θ_1 e θ_2 , respectivamente:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ -0,7071 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ 0,7071 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

De acordo com a equação (2.24), os autovetores devem ser representados segundo a matriz de transição P , apresentada em (2.30).

$$P = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

A sua correspondente matriz inversa P^{-1} , também requerida em (2.24) será:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 \\ 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Substituindo-se (2.28), (2.30) e (2.31) na equação (2.24), resulta em:

$$Y = \begin{bmatrix} 0,7071 & 0,7071 \\ -0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 \\ 0,7071 & 0,7071 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Efetuando-se as devidas multiplicações na equação anterior, tem-se como resultado exatamente a matriz original Y , apresentada em (2.27). Dessa forma, fica verificada a equação (2.24).

Por outro lado, tendo-se em vista que a impedância de um elemento qualquer é o inverso da admitância deste mesmo elemento, a equação (2.24) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$Z = (P) \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cdot (P)^{-1} \quad (2.33)$$

Onde,

Z = matriz de impedâncias;

$diag(1/\lambda)$ = matriz diagonal de autovalores inversos da matriz admitância;

P = matriz de transição, composta pelos autovetores da matriz Y .

A justificativa matemática da equação (2.33) está na seção B.2 do apêndice B ao final deste trabalho.

Substituindo-se a equação (2.33) em (2.22), resulta em:

$$[V] = (P)diag\left(\frac{1}{\lambda}\right).(P)^{-1}.[I] \quad (2.34)$$

Esta equação indica que a tensão em um determinado barramento de um sistema elétrico é dependente tanto dos autovalores da matriz admitância, quanto de seus autovetores. Com o propósito de verificar esta dependência, retornemos ao sistema elétrico da figura 2.2 ou, mais especificamente, à sua matriz admitância para a frequência de 300Hz, apresentada em (2.21).

Os autovalores da matriz admitância representativa do sistema elétrico em estudo, cujos elementos estão relacionados à frequência de 300 Hz, foram calculados através de um programa computacional especificamente desenvolvido para este propósito. Os valores encontrados são apresentados em (2.35) sob a forma de uma matriz diagonal.

$$diag(\lambda) = \begin{bmatrix} 4,31 - j43,30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,92 - j28,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,24 - j23,42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,47 - j15,67 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,03 - j9,53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,002 - j0,064 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,30 - j3,94 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,096 - j2,12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,17 - j2,42 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Observa-se que os autovalores são números complexos, uma vez que os elementos da matriz admitância também o são. Entretanto, na aplicação da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas, tanto os autovalores quanto os elementos dos autovetores correspondentes, serão considerados em módulo. Conforme já mencionado, a TEIRE é capaz de informar se um determinado barramento é mais, ou menos, sensível em relação a alguma alteração na topologia da rede. Ou seja, a teoria fornece informações *qualitativas* da rede.

A matriz apresentada em (2.35) será, em seguida, escrita em termos dos módulos dos autovalores.

$$diag(\lambda) = \begin{bmatrix} 43,52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 28,20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23,52 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15,74 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9,59 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2,43 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Como já ilustrado anteriormente, cada autovalor apresentado em (2.36) será associado ao seu autovetor correspondente. Por outro lado, a matriz de transição $[P]$, cujas colunas são compostas pelos autovetores da matriz admitância, é apresentada em (2.37).

$$P = \begin{bmatrix} 0,002 & 0,007 & 0,016 & 0,015 & 0,037 & 0,107 & 0,276 & 0,779 & 0,552 \\ 0,112 & 0,248 & 0,437 & 0,266 & 0,356 & 0,324 & 0,597 & 0,257 & 0,134 \\ 0,370 & 0,436 & 0,563 & 0,134 & 0,043 & 0,339 & 0,425 & 0,166 & 0,131 \\ 0,767 & 0,116 & 0,233 & 0,323 & 0,312 & 0,351 & 0,084 & 0,047 & 0,109 \\ 0,297 & 0,120 & 0,537 & 0,559 & 0,141 & 0,355 & 0,226 & 0,099 & 0,292 \\ 0,054 & 0,037 & 0,212 & 0,410 & 0,318 & 0,358 & 0,556 & 0,146 & 0,459 \\ 0,386 & 0,576 & 0,123 & 0,238 & 0,538 & 0,357 & 0,020 & 0,134 & 0,117 \\ 0,149 & 0,595 & 0,277 & 0,421 & 0,248 & 0,361 & 0,052 & 0,281 & 0,312 \\ 0,027 & 0,182 & 0,108 & 0,304 & 0,549 & 0,365 & 0,129 & 0,412 & 0,492 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Um dos autovetores da matriz de transição $[P]$ assume um significado de grande importância na TEIRE. Trata-se do autovetor associado ao autovalor de menor módulo. Para o caso em estudo, na matriz diagonal apresentada em (2.36) observa-se que o menor autovalor da matriz admitância é o elemento $|\lambda_{6,6}|$ com módulo igual a **0,065**. Dessa forma, o autovetor associado a este autovalor de menor módulo será o vetor correspondente à sexta coluna da matriz de transição $[P]$, indicada em (2.37). Para uma maior facilidade de observação, apresenta-se este vetor, em (2.38), isoladamente da matriz de transição $[P]$.

$$\theta_6 = \begin{bmatrix} 0,107 \\ 0,324 \\ 0,339 \\ 0,351 \\ 0,355 \\ 0,358 \\ 0,357 \\ 0,361 \\ 0,365 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A grande particularidade deste autovetor é que a diferença percentual entre o maior e o menor de seus elementos é a *mínima* encontrada dentre todos os outros autovetores.

Para exemplificar este fato, realiza-se em seguida o cálculo das diferenças percentuais entre o maior e o menor elemento de cada autovetor. Este cálculo é realizado através da equação (2.39).

$$\Delta\%_i = \left(\frac{\max |\theta_i| - \min |\theta_i|}{\min |\theta_i|} \right) \cdot 100\% \quad (2.39)$$

onde:

$\Delta\%_i$ = variação percentual entre os elementos do *i-ésimo* autovetor;

θ_i = *i-ésimo* autovetor.

Os resultados obtidos para os autovetores apresentados na matriz (2.37) são mostrados na tabela (2.3).

Tabela 2.3 – Variação percentual entre os elementos do *i-ésimo* autovetor.

AUTOVETOR	MAIOR ELEMENTO DE θ_i	MENOR ELEMENTO DE θ_i	$\Delta\%_i$
θ_1	0,767	0,002	38250
θ_2	0,595	0,007	8400
θ_3	0,537	0,016	3256
θ_4	0,559	0,015	3627
θ_5	0,549	0,037	1384
θ_6	0,365	0,107	241
θ_7	0,597	0,020	2885
θ_8	0,779	0,047	1557
θ_9	0,552	0,109	1200

Como observado na tabela 2.3, o autovetor θ_6 apresenta a menor variação percentual (241%) entre o maior e o menor de seus elementos. Este fato também pode ser observado através do gráfico apresentado na figura (2.3).

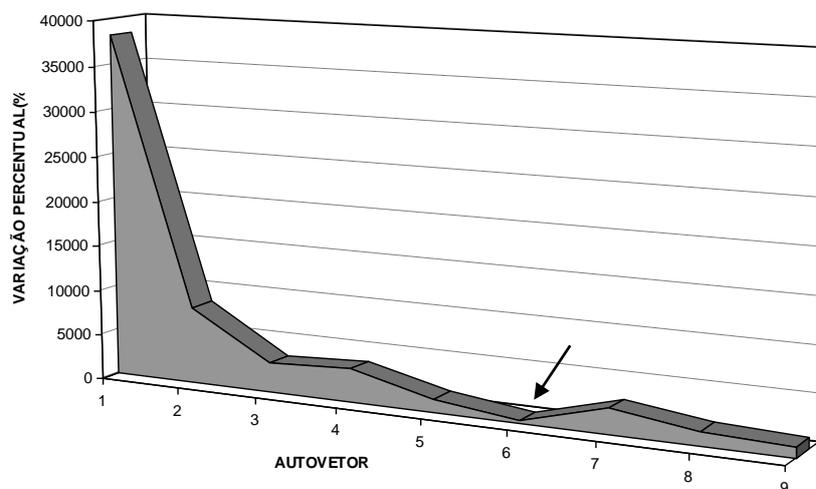


Figura 2.3 – Variação percentual entre o maior e o menor elemento de cada autovetor.

Como será visto mais adiante, o módulo dos elementos do autovetor, que apresenta a menor variação percentual entre seus elementos (correspondente ao autovalor de menor módulo) terá forte ligação com as tensões nos barramentos do sistema de energia.

Em termos práticos, a cada barramento do sistema de energia pode ser associado um autovalor correspondente. Desse modo, o elemento $|\lambda|_{1,1}$ da matriz diagonal apresentada em (2.36) corresponde ao barramento 1 do sistema, o elemento $|\lambda|_{2,2}$ ao barramento 2 e, assim, sucessivamente. Para os autovetores também é válida esta correspondência, ou seja, o autovetor θ_1 corresponde à barra 1 do sistema elétrico, o autovetor θ_2 à barra 2 e, assim, sucessivamente. Além dos autovetores propriamente ditos, os elementos de cada autovetor também podem ser associados aos barramentos do sistema de energia. Dessa forma, por exemplo, para o autovetor θ_6 , o primeiro elemento corresponde ao barramento 1, o segundo elemento ao barramento 2 e, assim por diante.

2.3.2) ESTUDO DO COMPORTAMENTO DAS TENSÕES ATRAVÉS DA ANÁLISE DOS AUTOVETORES

Conforme mencionado anteriormente, os elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo, possui uma forte ligação com as tensões nos barramentos da rede. Assim sendo, com o intuito de demonstrar a correspondência entre os autovetores da matriz admitância e as tensões nos barramentos do sistema mostrado na figura 2.2, representou-se, inicialmente, os

módulos dos elementos do autovetor θ_6 (de menor variação percentual entre seus elementos) no gráfico ilustrado na figura 2.4.

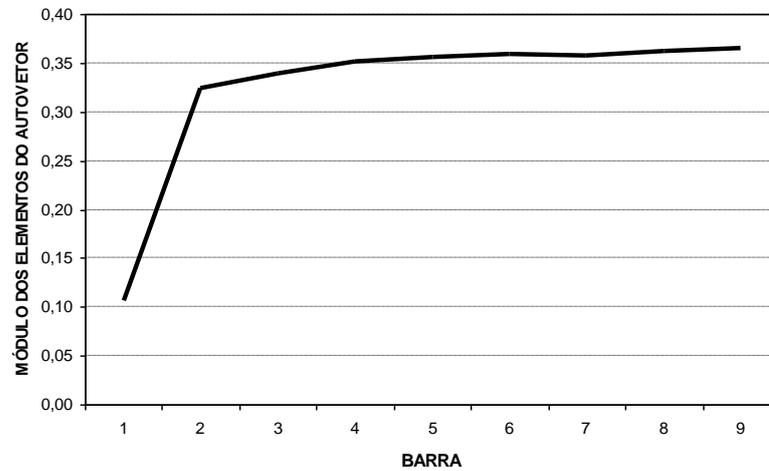


Figura 2.4 – Módulos dos elementos do autovetor θ_6 .

Em seguida, calculou-se, através do programa de penetração harmônica denominado HARMFLOW, as tensões de 5ª ordem em todas as barras da mesma rede, a qual possui fontes harmônicas conectadas às barras 3 e 9. Em termos de 5ª harmônica, as correntes injetadas pelas fontes nestas barras foram de $0,01276 \angle 41,79^\circ$ p.u. Os resultados obtidos para as tensões de 5ª harmônica, em módulo, nos barramentos do sistema são mostrados na figura 2.5.

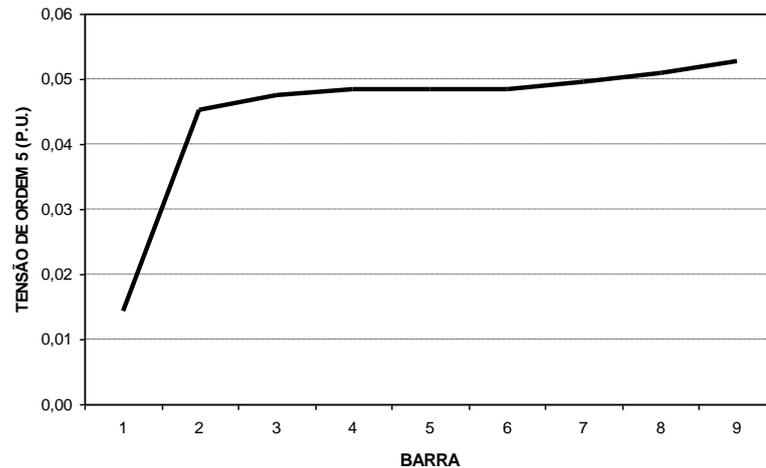


Figura 2.5 – Tensões harmônicas de 5ª ordem nas barras do sistema.

Comparando-se as figuras 2.4 e 2.5, é fácil verificar a grande similaridade no comportamento dos gráficos das figuras 2.4 (relativo ao módulo dos elementos do autovetor θ_6) e 2.8 (relativo às tensões nas barras do sistema considerado) . Em outros termos, pode-se dizer que, no que se refere à 5ª harmônica, para o caso em estudo, os módulos dos elementos do autovetor θ_6 se comportam praticamente da mesma forma que as tensões nos barramentos da rede de energia considerada. Desse modo, o comportamento qualitativo das tensões em um sistema elétrico pode, em geral, ser observado pela simples análise dos autovetores da matriz admitância da rede. Esta análise é efetuada com equacionamentos e cálculos computacionais muito mais simples que as metodologias tradicionais, que utilizam programas de fluxo de carga e/ou penetração harmônica.

2.3.3 - CORRESPONDÊNCIA ENTRE TENSÕES E AUTOVALORES QUANDO DA OCORRÊNCIA DE ALTERAÇÕES NA TOPOLOGIA DO SISTEMA ELÉTRICO

Na eventual ocorrência de uma perturbação que cause alterações na topologia de um sistema, é bastante provável que as tensões nas barras do referido sistema de energia sofram mudanças. Isso pode, também, ser verificado qualitativamente utilizando-se a TEIRE.

A análise da correspondência entre os autovalores da matriz admitância (sem considerar a existência de perturbação) e o comportamento das tensões do sistema elétrico está diretamente relacionada à sensibilidade da rede. Através das análises dos autovalores pode-se verificar o quanto um determinado barramento é sensível em relação a uma determinada perturbação no mesmo.

No presente caso (sistema elétrico mostrado na figura 2.2) considerar-se-á a inserção de um elemento *shunt* em uma barra do sistema. O elemento *shunt* considerado para tal propósito será um arranjo série composto por uma resistência, uma indutância e uma capacitância, conforme mostrado na figura 2.6.

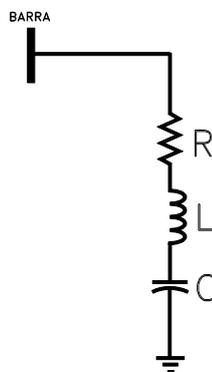


Figura 2.6 – Elemento *shunt* conectado aos barramentos do sistema.

Onde, $R = 0,965 \text{ ohm}$; $L = 33,147 \text{ mH}$ e $C = 8,491 \text{ }\mu\text{F}$.

Alocando-se esse elemento *shunt* em todas as barras do sistema (uma vez em cada barra), ter-se-á diferentes variações nas tensões de cada barra considerada. Pode-se, assim, indagar: em qual barra, quando da ocorrência da perturbação, as variações de tensão serão maiores (ou menores)?

As tensões de 5ª harmônica nas barras, antes e depois da inserção do ramo RLC, assim como, a variação percentual entre elas, estão indicadas na tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Tensões de 5ª harmônica nas barras do sistema antes e depois da inserção do ramo RLC.

BARRA DE ALOCAÇÃO DO RAMO RLC	TENSÃO DE 5ª HARMÔNICA NA BARRA		VARIÇÃO PERCENTUAL (%)
	ANTES (p.u.)	DEPOIS (p.u.)	
1	0,01441	0,00919	56,8009
2	0,04514	0,01224	268,7908
3	0,04745	0,01233	284,8337
4	0,04852	0,01209	301,3234
5	0,04846	0,01154	319,9307
6	0,04839	0,0108	348,0556
7	0,04965	0,01186	318,6341
8	0,05087	0,01163	337,4033
9	0,05276	0,01131	335,6730

O gráfico apresentado na figura 2.7 mostra a variação percentual da tensão de 5ª ordem devido à mudança do local de inserção do ramo RLC.

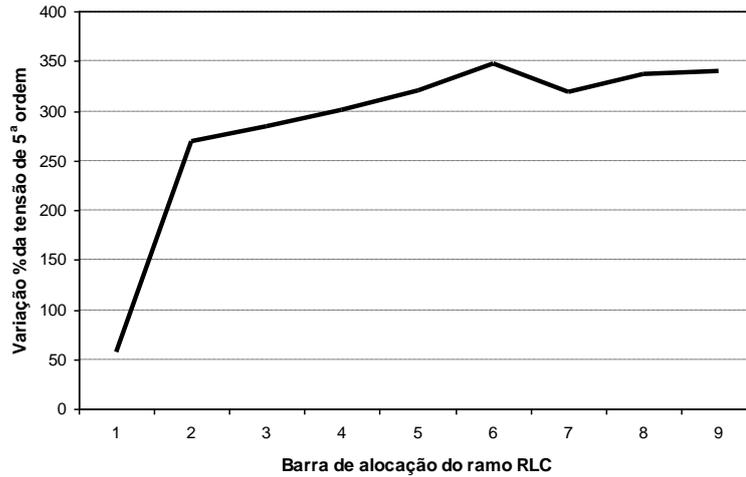


Figura 2.7 – Variação percentual da tensão de 5ª ordem de acordo com a variação da barra de alocação do ramo RLC.

Da análise da figura 2.7, verifica-se que, quando o ramo RLC é alocado na barra 6, a variação percentual da tensão de 5ª ordem é a maior observada. Em outras palavras, o barramento de número 6, para o sistema elétrico da figura 2.2, é o mais sensível para a perturbação considerada.

Buscando-se uma correspondência entre estas variações e os autovalores da matriz admitância original (sem a carga RLC), para o sistema elétrico considerado, representou-se, através de um gráfico, os módulos dos respectivos autovalores (figura 2.8) da matriz admitância.

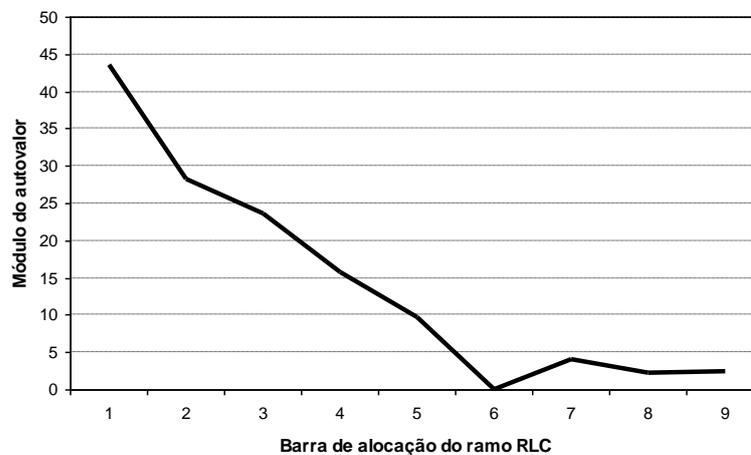


Figura 2.8 – Módulo dos autovalores da matriz admitância.

Da análise dos gráficos das figuras 2.7 e 2.8, observa-se claramente a correspondência inversa entre os mesmos. Em termos práticos, pode-se dizer que a curva representada na figura 2.7 é a imagem em “espelho” daquela apresentada na figura 2.8. Em outras palavras, quanto menor o módulo do autovalor associado a uma determinada barra, maior será a variação percentual da tensão de 5ª ordem na referida barra, quando da alocação do ramo RLC.

Até o presente momento, os fundamentos principais da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas já foram apresentados. Entretanto, necessita-se ainda de um equacionamento mais abrangente, capaz de sistematizar as correspondências entre os autovalores e autovetores de uma matriz admitância e a sensibilidade de um sistema elétrico.

Na busca deste equacionamento, M. A. Laughon [4] desenvolveu a *matriz de sensibilidade para autovalores*. Os elementos desta matriz são formados por derivadas parciais do tipo $\frac{\partial \lambda_i}{\partial y_{ij}}$, onde λ_i é o i -ésimo autovalor da matriz admitância $[Y]$ e y_{ij} é um elemento dessa mesma matriz. Desse modo, cada um desses elementos, a partir da definição de derivadas parciais, indica o quanto um determinado autovalor – que pode ser associado a um determinado barramento de um sistema de energia – varia quando da variação de um elemento da matriz admitância.

O equacionamento necessário para a construção da *matriz de sensibilidade para autovalores* é apresentado a seguir.

2.4 – MATRIZ DE SENSIBILIDADE PARA AUTOVALORES

A matriz de sensibilidade para autovalores pode ser verificada, inicialmente, através de algumas manipulações na equação (2.33), abaixo reproduzida como equação (2.40):

$$Z = (P) \cdot \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot (P)^{-1} \quad (2.40)$$

É possível, com algumas manipulações matemáticas (conforme apêndice B.2), rescrever a equação (2.40) sob a forma expandida, como indicado em (2.41).

$$Z = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} \cdot \theta_n \cdot (\theta_n)^T \quad (2.41)$$

Onde:

N = número de barras do sistema eléctrico;

λ_n = n -ésimo autovalor da matriz admitância;

θ_n = n -ésimo autovetor da matriz admitância ou, ainda, n -ésima coluna da matriz P ;

$(\theta_n)^T$ = n -ésimo autovetor, transposto, da matriz admitância.

EXEMPLO NUMÉRICO:

Para se verificar a validade da equação (2.41), considere a matriz Y , apresentada em (2.42), como sendo representativa de um sistema elétrico de duas barras.

$$Y = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Os autovalores desta matriz serão:

$$\lambda_1 = 0,1382 \text{ e } \lambda_2 = 0,3618 \quad (2.43)$$

Os autovetores ‘ θ ’ associados a esses autovalores ‘ λ ’ são apresentados a seguir, sob a forma da matriz de transição P , ou seja, sob a forma de uma matriz cujas colunas são compostas pelos respectivos autovetores da matriz original Y .

$$P = \begin{bmatrix} 0,8507 & -0,5257 \\ 0,5257 & 0,8507 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

De acordo com a equação (2.40), a matriz de impedâncias, associada ao sistema elétrico de duas barras em análise, pode ser escrita como se segue:

$$Z = \begin{bmatrix} 0,8507 & -0,5257 \\ 0,5257 & 0,8507 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{0,1382} & 0 \\ 0 & \frac{1}{0,3618} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8507 & -0,5257 \\ 0,5257 & 0,8507 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.45)$$

Obtendo-se, desse modo, a matriz de impedâncias apresentada em (2.46).

$$Z = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Este mesmo resultado deverá ser obtido pela utilização da equação (2.41). De acordo com esta equação, pode-se escrever, em forma estendida, a seguinte igualdade:

$$Z = \left\{ \left(\frac{1}{0,1382} \right) \cdot \begin{bmatrix} 0,8507 \\ 0,5257 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8507 & 0,5257 \end{bmatrix}^T + \left(\frac{1}{0,3618} \right) \cdot \begin{bmatrix} -0,5257 \\ 0,8507 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,5257 & 0,8507 \end{bmatrix}^T \right\} \quad (2.47)$$

Resolvendo-se todas as operações pertinentes à equação (2.47), chegar-se-á a mesma matriz indicada em (2.46), verificando-se, assim, a aplicabilidade da equação (2.41).

Foi exatamente através da análise desta equação (2.41) que M.A. Laughon [6] desenvolveu a *matriz de sensibilidade para autovalores*.

Essa matriz é constituída pelo produto de dois dos fatores presentes na equação (2.41), como pode ser observado em (2.48).

$$S_n = \theta_n \cdot (\theta_n)^T \quad (2.48)$$

O significado físico da equação (2.48) foi verificado por M.A. Laughton em 1964, o qual demonstrou em [6], a igualdade apresentada em (2.49).

$$S_n = \theta_n \cdot (\theta_n)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{11}} & \dots & \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{1N}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{NN}} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Onde:

S_n = matriz de sensibilidade associada ao autovetor n ;

λ_n = n -ésimo autovalor;

θ_n = n -ésimo autovetor;

$y_{n,n}$ = elemento n,n da matriz de admitâncias.

Substituindo-se a equação (2.48) em (2.41), pode-se representar a matriz de impedâncias da rede em termos da matriz de sensibilidade $[S]$, conforme mostrado em (2.50).

$$[Z] = \sum_{n=1, N}^N \frac{1}{\lambda_n} \cdot S_n \quad (2.50)$$

De posse de (2.50), a equação matricial linear $[V] = [Z].[I]$ pode agora ser reescrita em termos de autovalores e da matriz de sensibilidade $[S]$, conforme observado em (2.51).

$$[V] = \left(\sum_{n=1, N}^N \frac{1}{\lambda_n} \cdot S_n \right) \cdot [I] \quad (2.51)$$

Verifica-se, assim, a *dependência* entre as tensões nos barramentos de um sistema elétrico e a matriz de sensibilidade $[S]$.

Pela observação da equação (2.49), nota-se que cada elemento da matriz S_n representa o coeficiente de sensibilidade entre o autovalor λ_n e o respectivo elemento da matriz de admitâncias. Desse modo, quanto maior for um determinado elemento $S_{n,n}$ na matriz de sensibilidade, maior será a sensibilidade do autovalor λ_n para modificações no elemento $y_{n,n}$ correspondente da matriz admitância.

Com o intuito de ilustrar a aplicabilidade da matriz de sensibilidade, vamos retornar ao sistema elétrico da figura 2.2. Pela análise da equação (2.48), verifica-se que o número de matrizes de sensibilidade será igual ao número de autovetores da matriz admitância, ou ainda, ao número de barras do sistema elétrico. Dessa forma, para o sistema da figura 2.2, ter-se-á 9 (nove) matrizes de sensibilidade. Porém, do mesmo modo como realizado para a verificação da correspondência entre autovetores e tensões do sistema, será considerada apenas a matriz de sensibilidade correspondente ao autovalor de menor módulo, ou seja, $\lambda_{6,6} = 0,065$, pelas mesmas razões expostas na seção 2.3.1. Assim, tem-se para o sistema da figura 2.2 a matriz de sensibilidade correspondente ao autovetor θ_6 , que, por sua vez, está associado ao autovalor de menor módulo.

Para o cálculo da matriz de sensibilidade S_6 utiliza-se a equação (2.48).
Dessa forma, tem-se:

$$S_6 = \theta_6 (\theta_6)^T = \begin{bmatrix} 0,0113 & 0,0345 & 0,0361 & 0,0374 & 0,0378 & 0,0381 & 0,0380 & 0,0385 & 0,0388 \\ 0,0345 & 0,1053 & 0,1099 & 0,1139 & 0,1152 & 0,1162 & 0,1158 & 0,1172 & 0,1183 \\ 0,0361 & 0,1099 & 0,1147 & 0,1189 & 0,1203 & 0,1213 & 0,1209 & 0,1224 & 0,1235 \\ 0,0374 & 0,1139 & 0,1189 & 0,1233 & 0,1247 & 0,1258 & 0,1253 & 0,1268 & 0,1280 \\ 0,0378 & 0,1152 & 0,1203 & 0,1247 & 0,1262 & 0,1272 & 0,1268 & 0,1283 & 0,1295 \\ 0,0381 & 0,1162 & 0,1213 & 0,1258 & 0,1272 & 0,1283 & 0,1279 & 0,1294 & 0,1306 \\ 0,0380 & 0,1158 & 0,1209 & 0,1253 & 0,1268 & 0,1279 & 0,1275 & 0,1290 & 0,1302 \\ 0,0385 & 0,1172 & 0,1224 & 0,1268 & 0,1283 & 0,1294 & 0,1290 & 0,1246 & 0,1317 \\ 0,0388 & 0,1183 & 0,1235 & 0,1280 & 0,1295 & 0,1306 & 0,1302 & 0,1317 & 0,1271 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

A alteração na topologia da rede, no caso a inserção de um ramo *shunt* em um determinado barramento n de um sistema elétrico, irá causar apenas a variação do elemento $y_{n,n}$ da diagonal principal da matriz admitância da rede. Pode-se afirmar, igualmente, que a sensibilidade do sistema pode ser observada pela simples análise dos elementos da diagonal principal da matriz de sensibilidade $[S]$. Neste contexto, quanto maior for o valor de um determinado elemento da diagonal principal da matriz $[S]$, onde $s_n = |\partial\lambda_n/\partial y_{n,n}|$, maior será a sensibilidade do barramento correspondente à uma determinada perturbação [3].

A figura 2.9 destaca os elementos da diagonal principal da matriz de sensibilidade (2.52), do sistema elétrico da figura 2.2, em função dos barramentos do sistema.

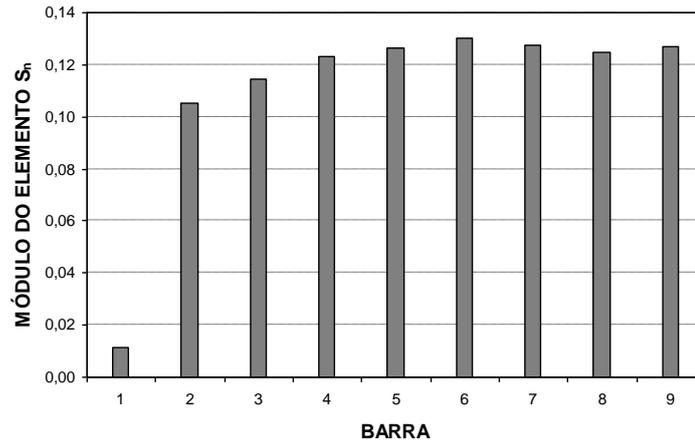


Figura 2.9 – Elementos da diagonal principal da matriz de sensibilidade relativa ao sistema elétrico da figura 2.2

Conforme pode ser verificado pela figura anterior, a barra número 6 apresenta o maior coeficiente de sensibilidade. Este resultado está perfeitamente coerente com os resultados obtidos nas seções 2.3.1 e 2.3.2, os quais indicavam a barra 6 como a mais sensível, sob o ponto de vista de tensão harmônica, quando da ocorrência de uma perturbação no sistema.

O presente trabalho utilizará a TEIRE para as análises de alocação ótima de filtros harmônicos e bancos de capacitores.

2.5 – CONCLUSÃO

Este capítulo apresentou a Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas. Inicialmente foi realizada uma recordação relativa aos conceitos de autovalores e autovetores, necessários ao entendimento da TEIRE. Em seguida, através de um exemplo numérico, mostrou-se como representar a topologia de um sistema elétrico através dos autovalores e autovetores da matriz admitância do mesmo.

A análise dos autovalores da matriz admitância da rede indicou o comportamento das tensões nas barras. Tal estudo leva à possibilidade da criação da matriz de sensibilidade associada a autovalores, a qual se mostrou ser eficiente para estudos dos efeitos de perturbações em um sistema elétrico.

CAPÍTULO 3

ALOCAÇÃO ÓTIMA DE FILTROS HARMÔNICOS SINTONIZADOS PASSIVOS

3.1 – INTRODUÇÃO

Atualmente, poucas são as técnicas de estudos existentes para alocação ótima de filtros harmônicos passivos sintonizados com relação a alimentadores de distribuição, sistemas de subtransmissão ou transmissão.

No Brasil, o sistema interligado de transmissão de energia elétrica recebe a designação de Rede Básica que, pela Resolução ANEEL Nº. 245 de 31 de julho de 1998, é constituída por todas as linhas de transmissão e equipamentos de subestação em tensão de 230 kV ou superior. Assim, para a Rede Básica não se justifica tecnicamente a existência de filtros harmônicos, salvo em situações muito especiais, como: existência de estações conversoras de sistemas de transmissão em corrente contínua, existência de equipamentos com tecnologia FACTS (*Flexible AC Transmission Systems*) ou, ainda, a existência de uma grande unidade consumidora industrial conectada diretamente ao sistema de transmissão. Mesmo nestes casos, a alocação de filtros harmônicos não requer estudos de otimização, uma vez que as barras de alocação dos referidos filtros ficam perfeitamente identificadas pela localização das cargas não-lineares e seus respectivos transformadores.

O mesmo pode ser observado em sistemas elétricos industriais, onde a alocação de filtros harmônicos não requer estudos aprofundados para determinação da localização ótima dos mesmos, uma vez que também neste caso as barras de alocação ficam completamente identificadas pela localização das cargas não-lineares.

Por outro lado, o problema da determinação do ponto de ótima alocação de filtros harmônicos se mostra de grande importância em sistemas de subtransmissão de energia elétrica e, principalmente, em alimentadores de distribuição, uma vez que as cargas não-lineares conectadas a estes sistemas são uniformemente distribuídas. Os sistemas elétricos de subtransmissão compõem as redes elétricas das concessionárias de distribuição de energia elétrica, dispostas, na grande maioria das vezes, por configurações em anel que interligam as diversas subestações das distribuidoras. Os alimentadores de distribuição, por outro lado, são os sistemas elétricos radiais que partem de um determinado barramento da subestação e se ramificam de modo a atender as cargas residenciais, comerciais e industriais conectadas em tensões inferiores a 34,5 kV.

O presente capítulo, portanto, abrangerá a aplicação da TEIRE na alocação ótima de filtros harmônicos passivos sintonizados em alimentadores de distribuição e em sistemas de subtransmissão de energia elétrica. Para validação desta metodologia, será utilizado o método empírico de tentativa e erro para identificação do barramento ótimo de alocação do elemento *shunt*, no caso, um filtro harmônio passivo sintonizado.

3.2 – APLICAÇÃO DA TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS

Conforme abordado no capítulo 2, a alocação ótima de elementos passivos em um sistema de energia elétrica consiste na busca pela barra com maior índice de sensibilidade à uma determinada perturbação. Entende-se por perturbação, neste trabalho, qualquer alteração na impedância própria de um determinado barramento de uma rede elétrica. Para o estudo de alocação ótima de filtros harmônicos passivos sintonizados, a perturbação é exatamente a conexão de um ramo RLC do filtro a ser conectado à barra.

O processo de análise de alocação ótima de um filtro harmônico sintonizado em um sistema elétrico radial (como um alimentador de distribuição) pode ser organizado em passos sequenciais, de forma a se ter uma sistematização do processo de utilização da TEIRE para a solução do problema. A figura 3.1, mostrada a seguir, apresenta um fluxograma básico dos passos para aplicação da TEIRE na solução do problema de alocação de filtros sintonizados em alimentadores de distribuição.

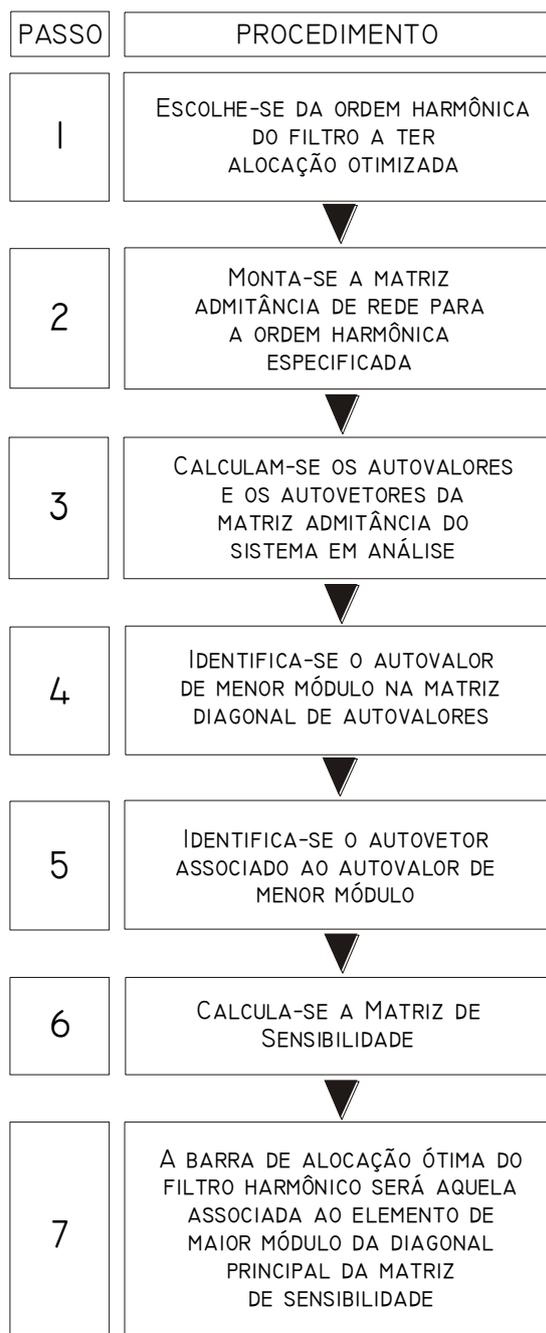


Figura 3.1 – Fluxograma básico para aplicação da TEIRE para alocação ótima de filtros sintonizados em alimentadores de distribuição

Para ilustração do processo, será utilizado um sistema radial típico de um sistema de distribuição, onde se encontram presentes várias cargas não-lineares uniformemente distribuídas ao longo do alimentador.

Em geral, a composição das cargas não-lineares em um alimentador de distribuição se resume em modernos eletrodomésticos, lâmpadas fluorescentes compactas, reatores eletrônicos, televisores, computadores, máquinas copadoras, equipamentos industriais existentes em pequenas indústrias conectadas em média ou baixa tensão, entre outros. Em alimentadores de distribuição, a única maneira de identificar as correntes injetadas em cada barra do sistema é através de medições apropriadas nestas barras e em suas derivações.

O sistema aqui utilizado é um sistema real, mais precisamente um alimentador em 13,8 kV da subestação ELDORADO, parte integrante dos ativos da Empresa Energética de Estado de Mato Grosso do Sul S/A – ENERSUL. A figura 3.2 mostra o diagrama unifilar do alimentador em questão.

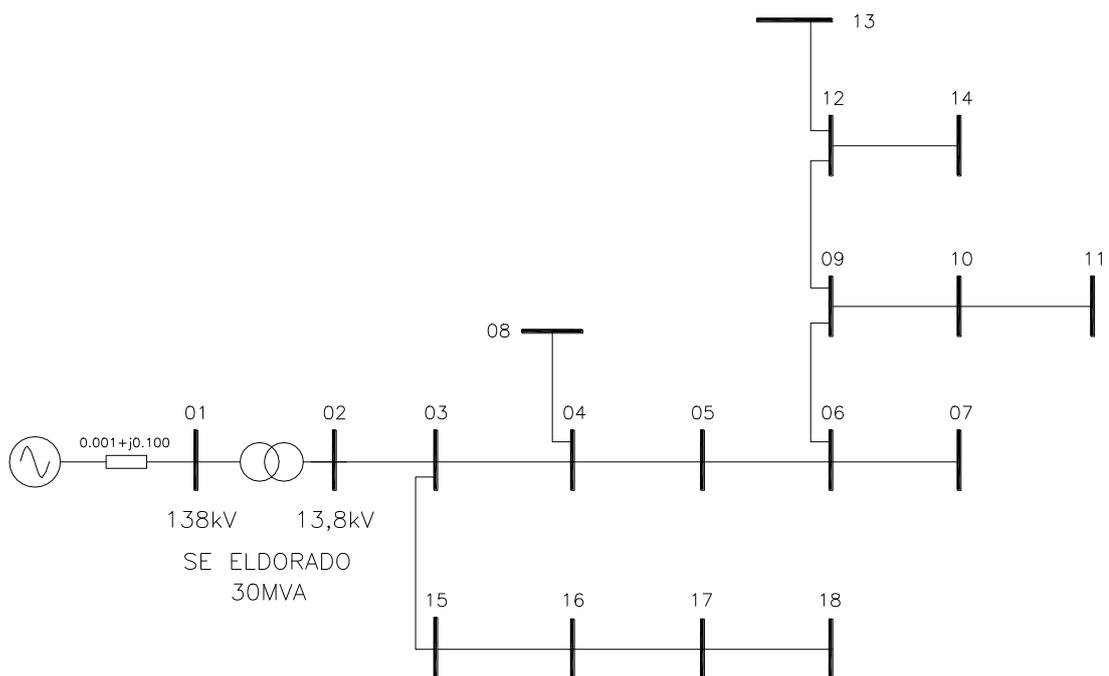


Figura 3.2 – Diagrama unifilar do alimentador da SE ELDORADO 13,8 kV

Os valores das correntes harmônicas consideradas ao longo do alimentador foram definidas neste exemplo a partir de medições realizadas em

outros alimentadores de distribuição na mesma tensão de fornecimento. Outro dado importante é que tanto o sistema da figura 3.2 como os sistemas de onde foram recolhidos os dados das medições compõem alimentadores tipicamente residenciais.

A seguir, cada um dos passos descritos no fluxograma da figura 3.1 serão seguidos sistematicamente até a obtenção do barramento de alocação de um filtro sintonizado passivo de 5ª ordem que minimize a distorção harmônica total média em todas as barras do sistema. Após a conclusão do processo de utilização da TEIRE, a mesma análise será realizada utilizando-se um método empírico, através de um programa de penetração harmônica, para consistência da metodologia aqui utilizada.

3.2.1) PASSO 1 – DEFINIÇÃO DA ORDEM HARMÔNICA DO FILTRO A SER ALOCADO NO SISTEMA ELÉTRICO.

No lado primário dos alimentadores, verifica-se como corrente harmônica predominante, aquela na frequência de 300Hz, ou seja, a 5ª harmônica. Apesar dos equipamentos ligados a estes alimentadores serem, em geral, grandes geradores de correntes de 3ª harmônica, as mesmas, por serem normalmente iguais em módulo e fase (sequência zero), não transitam para o lado primário do alimentador devido ao tipo de conexão dos transformadores de distribuição, conectados em *DELTA-ESTRELA ATERRADO*. Em verdade, ter-se-ia um fluxo considerável de terceira harmônica para o lado primário do alimentador quando da presença de grandes níveis de desequilíbrios na rede.

Com base no exposto acima, a frequência de sintonia do filtro a ser alocado no alimentador de distribuição da figura 3.2 será 300Hz, ou em outros termos, a 5^a harmônica.

<i>Frequência de sintonia do filtro = 300 Hz (5^a harmônica)</i>
--

3.2.2) PASSO 2 – MONTAGEM DA MATRIZ ADMITÂNCIA DA REDE NA ORDEM HARMÔNICA ESPECIFICADA.

Conforme apresentado no Capítulo 2, para a obtenção dos valores numéricos dos elementos que compõem a matriz de admitâncias [Y], deve-se converter as impedâncias das linhas e dos elementos ativos do sistema em valores de admitância (lembrando-se que a admitância de um elemento é igual ao inverso da impedância do mesmo). Os dados pertinentes ao sistema da figura 3.2 são indicados nas tabelas 3.1 e 3.2 a seguir.

Tabela 3.1 – Dados de barra do alimentador.

BARRA	P [MW]	Q [MVar]
5	0,8	0,60
7	1,9	0,74
8	4,6	1,96
10	0,5	0,20
11	1,7	0,99
13	2,7	1,31
14	4,8	3,60
15	1,8	0,83
16	2,6	1,48
17	1,8	0,87
18	1,3	0,79

Tabela 3.2 – Dados de linha do alimentador.

DA BARRA	PARA BARRA	R	X(300Hz)
1	2	0,0100	0,6500
2	3	0,0192	0,2875
3	4	0,0452	0,9260
4	8	0,0123	0,4380
4	5	0,0570	0,8685
5	6	0,0132	0,1895
6	7	0,0581	0,8815
6	9	0,0119	0,2070
9	12	0,0120	0,2100
12	13	0,1000	1,0100
12	14	0,0824	0,9660
9	10	0,2198	2,0765
10	11	0,0169	0,2995
3	15	0,3202	3,0135
15	16	0,0324	0,4225
16	17	0,0727	0,7495
17	18	0,0116	0,1180

Para os estudos elaborados neste trabalho, não será considerado o Efeito Pelicular (*Efeito Skin*) dos condutores, ou seja, as resistências envolvidas nos cálculos não sofrerão modificações de magnitude em função do aumento da frequência nas análises harmônicas.

De posse dos dados para o sistema em estudo, monta-se a matriz de admitâncias da rede apresentada na figura 3.3, na frequência desejada (300 Hz), conforme procedimentos mostrados no capítulo 2.

1	0.0241 - 3.5381i	-0.0237 + 1.5381i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0.0237 + 1.5381i	0.2549 - 5.0009i	-0.2313 + 3.4628i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-0.2313 + 3.4628i	0.3187 - 4.8683i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	-0.0526 + 1.0773i	-0.0526 + 1.0773i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0.1919 - 4.5051i	0.1919 - 4.5051i	-0.0752 + 1.1465i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	-0.0752 + 1.1465i	-0.0752 + 1.1465i	0.4419 - 6.4011i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-0.3658 + 5.2516i	-0.0744 + 1.1295i	-0.0744 + 1.1295i	0.7171 - 11.1961i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	-0.0641 + 2.2813i	-0.0641 + 2.2813i	-0.2768 + 4.8150i	-0.2768 + 4.8150i	0.0739 - 2.3022i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	-0.0504 + 0.4762i	-0.2712 + 4.7464i	-0.2712 + 4.7464i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0.2392 - 3.8066i	-0.1878 + 3.3283i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-0.1878 + 3.3283i	0.1904 - 3.3355i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0.4560 - 6.7546i	-0.0971 + 0.9805i	-0.0971 + 0.9805i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	-0.0971 + 0.9805i	0.1019 - 0.9922i	0.1019 - 0.9922i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	-0.0877 + 1.0277i	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 3.3 – Matriz admitância de rede na frequência de 300Hz.

É pertinente observar o grau de esparsidade da matriz de admitâncias da rede, pois a exatidão da TEIRE está diretamente relacionada com este índice. Mais adiante, mostrar-se-á que sistemas em anel apresentam resultados menos expressivos que os sistemas radiais quando da utilização da TEIRE. Entretanto, mesmo para sistemas com configuração em anel, a utilização da TEIRE ainda se constitui em uma ferramenta muito poderosa de análise, conforme será visto neste trabalho.

3.2.3) PASSO 3 – CÁLCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES DA MATRIZ ADMITÂNCIA DE REDE DO SISTEMA EM ANÁLISE

A metodologia de cálculo de autovalores e autovetores de matrizes, apresentada no capítulo 2, foi aqui aplicada para determinação destes elementos. Considerando-se, portanto, a matriz admitância do sistema elétrico em análise, apresentada na figura 3.3, calculou-se a matriz diagonal de autovalores, cujos elementos da diagonal principal estão indicados na figura 3.4.

$$\text{diag}(\lambda) = \begin{bmatrix} 17,83090 \\ 17,63510 \\ 11,33390 \\ 8,81510 \\ 6,16120 \\ 6,92050 \\ 5,66210 \\ 4,43460 \\ 3,72760 \\ 1,96050 \\ 0,03050 \\ 0,07190 \\ 0,27650 \\ 0,48310 \\ 1,31010 \\ 0,82900 \\ 1,13770 \\ 1,02400 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Em termos práticos, como também já mostrado no capítulo 2, a cada autovalor corresponde um autovetor associado e um barramento da rede elétrica considerada. Assim, por exemplo, o autovalor (2,2) – linha 2 e coluna 2 da matriz diagonal - está associado ao segundo autovetor da matriz de transição $[P]$ e, também, ao barramento número 2 da rede. A matriz de transição é aquela onde as colunas são exatamente os autovetores da matriz de admitâncias da rede, conforme indicado a seguir.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,0001	0,0000	0,0025	0,1990	0,1426	0,0005	0,0385	0,1273	0,8671
2	0,0007	0,0001	0,0126	0,6838	0,2437	0,0010	0,0538	0,0766	0,1092
3	0,0026	0,0003	0,0220	0,6628	0,0184	0,0004	0,0092	0,0690	0,4228
4	0,0288	0,0000	0,0904	0,2060	0,7633	0,0026	0,0102	0,2204	0,1123
5	0,3228	0,0000	0,4716	0,0073	0,2200	0,0033	0,0044	0,5482	0,0404
6	0,6937	0,0000	0,4208	0,0417	0,1767	0,0003	0,0028	0,1591	0,0079
7	0,0470	0,0000	0,0467	0,0061	0,0398	0,0000	0,0007	0,0547	0,0035
8	0,0042	0,0000	0,0228	0,0722	0,4515	0,0013	0,0069	0,2357	0,1798
9	0,5877	0,0000	0,5157	0,0144	0,0462	0,0034	0,0013	0,3622	0,0490
10	0,0212	0,0000	0,0403	0,0023	0,0137	0,7296	0,0002	0,0182	0,0009
11	0,0049	0,0000	0,0168	0,0014	0,0162	0,6794	0,0003	0,0554	0,0070
12	0,2554	0,0000	0,5614	0,0383	0,2146	0,0758	0,0041	0,5874	0,0612
13	0,0149	0,0000	0,0535	0,0048	0,0409	0,0126	0,0009	0,1683	0,0221
14	0,0157	0,0000	0,0563	0,0051	0,0433	0,0133	0,0009	0,1790	0,0236
15	0,0001	0,0114	0,0009	0,0434	0,0048	0,0000	0,6146	0,0030	0,0078
16	0,0000	0,0720	0,0003	0,0200	0,0047	0,0000	0,7710	0,0118	0,0566
17	0,0000	0,7350	0,0000	0,0002	0,0002	0,0000	0,0476	0,0013	0,0083
18	0,0000	0,6741	0,0000	0,0031	0,0008	0,0000	0,1446	0,0027	0,0148

	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0,0200	0,0487	0,0180	0,0497	0,1675	0,2653	0,1167	0,2271	0,0048
2	0,0206	0,1111	0,0405	0,1054	0,3329	0,3851	0,2057	0,3547	0,0079
3	0,0093	0,1378	0,0497	0,1216	0,3597	0,2928	0,1960	0,2949	0,0070
4	0,0409	0,2032	0,0308	0,1853	0,3882	0,1285	0,0577	0,2372	0,0023
5	0,4279	0,2576	0,1024	0,1543	0,0566	0,0469	0,1771	0,0510	0,0058
6	0,3709	0,2682	0,1168	0,1396	0,0223	0,0174	0,2003	0,0014	0,0056
7	0,5123	0,2734	0,1236	0,1827	0,0384	0,1164	0,7268	0,2411	0,0524
8	0,2636	0,2040	0,0315	0,2085	0,4867	0,2944	0,0893	0,4639	0,0041
9	0,3653	0,2768	0,1291	0,1054	0,1005	0,0119	0,0677	0,0009	0,0073
10	0,0282	0,3101	0,1799	0,5725	0,0863	0,0019	0,0225	0,0002	0,0017
11	0,0682	0,3123	0,1835	0,6227	0,1006	0,0032	0,0299	0,0003	0,0025
12	0,2487	0,2803	0,1345	0,1328	0,1889	0,0045	0,0703	0,0002	0,0192
13	0,2543	0,2856	0,1431	0,1815	0,3614	0,0141	0,4055	0,0012	0,6862
14	0,2819	0,2835	0,1417	0,1770	0,3433	0,0178	0,3265	0,0019	0,7250
15	0,0018	0,1915	0,3962	0,0169	0,0231	0,5054	0,0588	0,4096	0,0046
16	0,0019	0,1973	0,4341	0,0343	0,0290	0,3361	0,0193	0,2333	0,0023
17	0,0008	0,2046	0,4815	0,0585	0,1104	0,2939	0,0629	0,2786	0,0035
18	0,0010	0,2052	0,4854	0,0604	0,1170	0,3477	0,0697	0,3218	0,0040

Figura 3.5 – Matriz de transição (autovetores).

O próximo passo, de acordo com a TEIRE, é identificar o autovalor de menor módulo.

3.2.4) PASSO 4 – IDENTIFICAÇÃO DO AUTOVALOR DE MENOR MÓDULO

O autovetor associado ao menor autovalor da matriz admitância tem uma importância fundamental na aplicação da TEIRE. É a partir dele que será elaborada a Matriz de Sensibilidade [S] de barra para identificação dos pontos de ótima alocação dos elementos passivos abordados neste trabalho.

A figura 3.6 ilustra o vetor $diag(\lambda)$, indicado em (3.1), em forma de gráfico de barras para uma melhor identificação do autovalor de menor módulo.

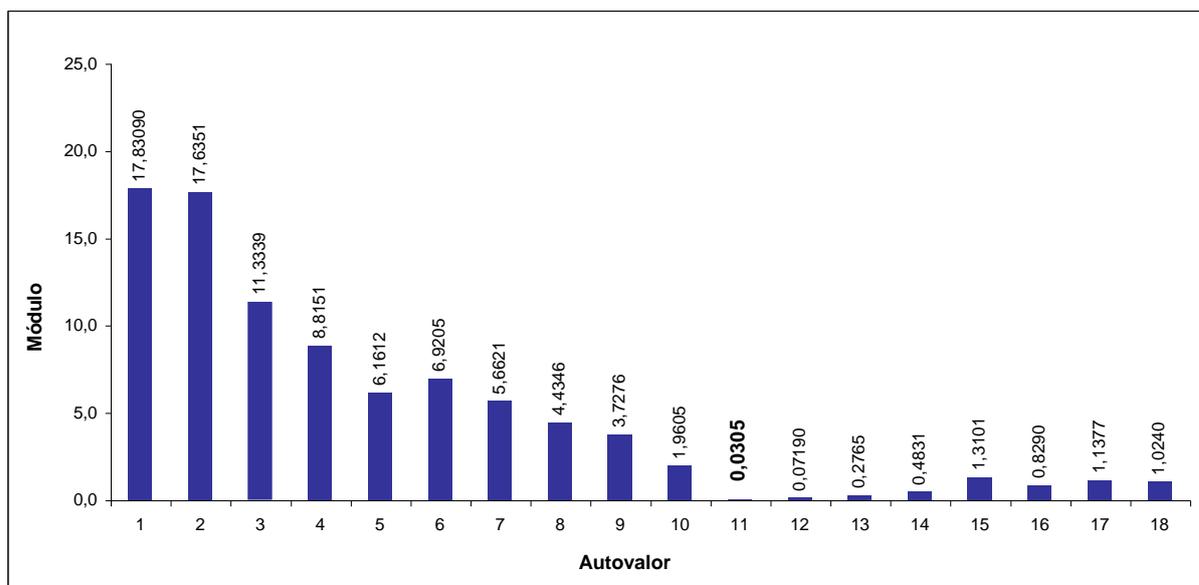


Figura 3.6 – Módulo dos autovalores da matriz admitância de rede.

Conforme observado na figura 3.6, o menor autovalor do conjunto é aquele de módulo igual a **0,03050**, correspondente ao 11º elemento do vetor $diag(\lambda)$.

3.2.5) PASSO 5 – IDENTIFICAÇÃO DO AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR DE MENOR MÓDULO

O autovetor associado ao menor autovalor da matriz admitância tem uma importância fundamental na aplicação da TEIRE. É a partir dele que será elaborada a Matriz de Sensibilidade $[S]$ de barra para identificação dos pontos de ótima alocação dos elementos passivos abordados neste trabalho.

Desse modo, o autovetor associado ao autovalor de menor módulo, conforme o resultado verificado no passo anterior, será o 11^o vetor da Matriz de Transição $[P]$, indicado a seguir.

$$\theta \text{ (associado)} = \begin{bmatrix} 0,0487 \\ 0,1111 \\ 0,1378 \\ 0,2032 \\ 0,2576 \\ 0,2682 \\ 0,2734 \\ 0,2040 \\ 0,2768 \\ 0,3101 \\ 0,3123 \\ 0,2803 \\ 0,2856 \\ 0,2835 \\ 0,1915 \\ 0,1973 \\ 0,2046 \\ 0,2052 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

A particularidade deste autovetor é que o mesmo apresenta a menor variação percentual entre o menor e o maior de seus elementos. Em verdade, se o autovalor associado fosse nulo, todos os elementos de seu autovetor correspondente seriam iguais, ou seja, a variação percentual entre o menor e o maior elemento deste autovetor seria nula.

Finalmente, tem-se a seguir o penúltimo passo para a alocação ótima de um filtro harmônico sintonizado passivo, trata-se da determinação da Matriz de Sensibilidade [S].

3.2.6) PASSO 6 – CÁLCULO DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE

Uma vez encontrado o autovetor associado ao menor autovalor da matriz admitância de rede, tem-se que a Matriz de Sensibilidade pode ser obtida a partir da equação 3.3, abaixo.

$$[S] = [P_{ASSOCIADO}] \cdot [P_{ASSOCIADO}]^T \quad (3.3)$$

Com base na equação (3.3), verifica-se que o cálculo da Matriz de Sensibilidade consiste simplesmente na multiplicação do autovetor associado ao autovalor de menor módulo pelo seu vetor transposto.

Após a multiplicação indicada em (3.3) obteve-se a matriz indicada na figura 3.7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0,0024	0,0054	0,0067	0,0099	0,0126	0,0131	0,0133	0,0099	0,0135
2	0,0054	0,0123	0,0153	0,0226	0,0286	0,0298	0,0304	0,0227	0,0308
3	0,0067	0,0153	0,0190	0,0280	0,0355	0,0369	0,0377	0,0281	0,0381
4	0,0099	0,0226	0,0280	0,0413	0,0523	0,0545	0,0555	0,0414	0,0562
5	0,0126	0,0286	0,0355	0,0523	0,0664	0,0691	0,0704	0,0526	0,0713
6	0,0131	0,0298	0,0369	0,0545	0,0691	0,0719	0,0733	0,0547	0,0742
7	0,0133	0,0304	0,0377	0,0555	0,0704	0,0733	0,0747	0,0558	0,0757
8	0,0099	0,0227	0,0281	0,0414	0,0526	0,0547	0,0558	0,0416	0,0565
9	0,0135	0,0308	0,0381	0,0562	0,0713	0,0742	0,0757	0,0565	0,0766
10	0,0151	0,0345	0,0427	0,0630	0,0799	0,0832	0,0848	0,0633	0,0858
11	0,0152	0,0347	0,0430	0,0634	0,0804	0,0837	0,0854	0,0637	0,0864
12	0,0137	0,0311	0,0386	0,0570	0,0722	0,0752	0,0766	0,0572	0,0776
13	0,0139	0,0317	0,0393	0,0580	0,0736	0,0766	0,0781	0,0583	0,0791
14	0,0138	0,0315	0,0391	0,0576	0,0730	0,0760	0,0775	0,0578	0,0785
15	0,0093	0,0213	0,0264	0,0389	0,0493	0,0514	0,0524	0,0391	0,0530
16	0,0096	0,0219	0,0272	0,0401	0,0508	0,0529	0,0539	0,0402	0,0546
17	0,0100	0,0227	0,0282	0,0416	0,0527	0,0549	0,0559	0,0417	0,0566
18	0,0100	0,0228	0,0283	0,0417	0,0529	0,0550	0,0561	0,0419	0,0568
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0,0151	0,0152	0,0137	0,0139	0,0138	0,0093	0,0096	0,0100	0,0100
2	0,0345	0,0347	0,0311	0,0317	0,0315	0,0213	0,0219	0,0227	0,0228
3	0,0427	0,0430	0,0386	0,0393	0,0391	0,0264	0,0272	0,0282	0,0283
4	0,0630	0,0634	0,0570	0,0580	0,0576	0,0389	0,0401	0,0416	0,0417
5	0,0799	0,0804	0,0722	0,0736	0,0730	0,0493	0,0508	0,0527	0,0529
6	0,0832	0,0837	0,0752	0,0766	0,0760	0,0514	0,0529	0,0549	0,0550
7	0,0848	0,0854	0,0766	0,0781	0,0775	0,0524	0,0539	0,0559	0,0561
8	0,0633	0,0637	0,0572	0,0583	0,0578	0,0391	0,0402	0,0417	0,0419
9	0,0858	0,0864	0,0776	0,0791	0,0785	0,0530	0,0546	0,0566	0,0568
10	0,0962	0,0968	0,0869	0,0886	0,0879	0,0594	0,0612	0,0635	0,0636
11	0,0968	0,0975	0,0875	0,0892	0,0885	0,0598	0,0616	0,0639	0,0641
12	0,0869	0,0875	0,0786	0,0801	0,0795	0,0537	0,0553	0,0574	0,0575
13	0,0886	0,0892	0,0801	0,0816	0,0810	0,0547	0,0564	0,0584	0,0586
14	0,0879	0,0885	0,0795	0,0810	0,0804	0,0543	0,0559	0,0580	0,0582
15	0,0594	0,0598	0,0537	0,0547	0,0543	0,0367	0,0378	0,0392	0,0393
16	0,0612	0,0616	0,0553	0,0564	0,0559	0,0378	0,0389	0,0404	0,0405
17	0,0635	0,0639	0,0574	0,0584	0,0580	0,0392	0,0404	0,0419	0,0420
18	0,0636	0,0641	0,0575	0,0586	0,0582	0,0393	0,0405	0,0420	0,0421

Figura 3.7 – Matriz de Sensibilidade de barra.

Para a análise do barramento de maior sensibilidade, ou seja, aquele no qual um filtro harmônico passivo devidamente dimensionado e sintonizado terá o melhor desempenho global do que em qualquer outra barra, basta se considerar os elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade, onde o elemento $S(1,1)$ corresponde à sensibilidade da barra 1 do sistema elétrico, o elemento $S(2,2)$ à sensibilidade da barra 2 e assim, sucessivamente.

A figura 3.8 ilustra um gráfico de barras contendo somente os elementos da diagonal principal da matriz $[S]$, aqui denominados Elementos de Sensibilidade Própria da Barra.

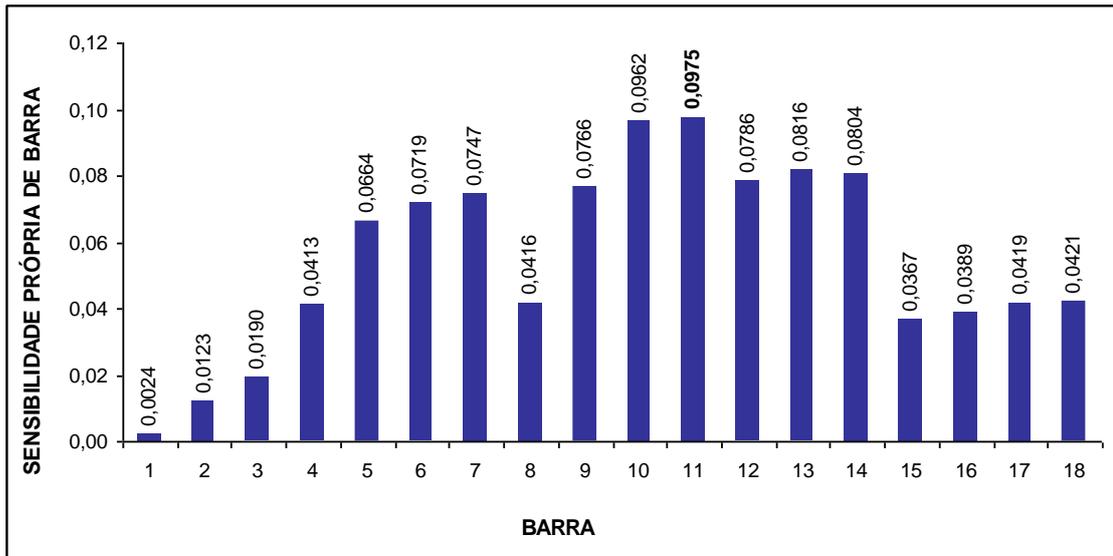


Figura 3.8 – Elementos de Sensibilidade Própria de Barra.

Finalmente, o último passo para a determinação da barra de alocação ótima para o filtro sintonizado passivo consiste na identificação da barra cuja sensibilidade própria seja a maior dentre as demais.

3.2.7) PASSO 7 – IDENTIFICAÇÃO DA BARRA DE ALOCAÇÃO ÓTIMA PARA O FILTRO HARMÔNICO PASSIVO SINTONIZADO.

Para identificação da barra de alocação ótima do filtro harmônico, basta se observar a barra com o maior elemento de sensibilidade própria que, de acordo com o gráfico da figura 3.8 é a barra de número 11 do sistema elétrico em estudo.

Analisando-se todos os passos seguidos até o presente momento, o leitor poderá associar o fato de que o menor autovalor da matriz admitância também

ocorreu na posição (11,11), que também corresponde à barra de número 11. Mas o resultado verdadeiramente confiável é aquele expresso pela Matriz de Sensibilidade de Barra.

Na prática, verifica-se que, quanto mais próximo de zero for o menor autovalor da matriz de admitâncias da rede, maiores serão as chances de que o elemento de maior sensibilidade própria de barra corresponda exatamente à barra do sistema associada ao menor autovalor. Observa-se, também, que, quanto maior o nível de esparsidade da matriz de admitâncias, mais próximo de zero estará o menor autovalor desta matriz.

Em resumo, para sistemas radiais de distribuição bastar-se-ia a análise dos autovalores para análise de sensibilidade da rede. Entretanto, quando a análise está associada a sistemas cujas matrizes apresentam um menor grau de esparsidade, como por exemplo, os sistemas dispostos em anel, é fundamental prosseguir com a aplicação da TEIRE até a obtenção da Matriz de Sensibilidade de Barra. Ainda assim, recomenda-se a utilização de um conjunto de barras candidatas ao ponto de ótima alocação de elementos passivos em derivação, ao invés de selecionar simplesmente aquela com maior elemento de sensibilidade própria, pois, como já abordado anteriormente, a exatidão do método é inversamente proporcional ao grau de esparsidade da matriz de admitâncias. Para um sistema em anel de 100 (cem) barras, por exemplo, recomenda-se selecionar através da TEIRE as 10 (dez) barras com os maiores elementos de sensibilidade própria e, em seguida, finalizar a análise com métodos tradicionais.

No próximo tópico, o mesmo sistema elétrico analisado para a alocação ótima de um filtro harmônico sintonizado passivo, com a utilização da TEIRE, será resolvido através do método empírico de tentativa e erro, através de um programa computacional de penetração harmônica, para comparação dos resultados e validação da metodologia.

3.3 – APLICAÇÃO DE MÉTODOS EMPÍRICOS DE ANÁLISE

A aplicação de métodos empíricos neste trabalho tem por objetivo servir como ferramenta de comparação e validação da TEIRE. Para tanto, utilizou-se um *software* de penetração harmônica denominado HARMFLOW, desenvolvido na Universidade Federal de Uberlândia.

De início, o grande problema para a aplicação de um método empírico para a determinação do barramento no qual a presença do filtro provocasse a maior variação percentual para a tensão de 5^a harmônica, foi quanto ao problema do dimensionamento do filtro sintonizado a ser alocado, de forma isolada, em cada uma das barras do sistema elétrico. Sob este aspecto, existiria um filtro único e constante a ser alocado em cada barra do sistema isoladamente?

Os motivos desta dúvida partem da constatação de que, em um sistema de distribuição, as impedâncias próprias de cada barra são aleatoriamente variáveis no tempo, uma vez que a topologia física das linhas dos sistemas de distribuição varia sensivelmente em função do tempo devido às frequentes atuações de chaves fusíveis, seccionadoras, religadores automáticos, assim como, às variações de carga. Deste modo, seria necessário o dimensionamento de um filtro específico para cada barra considerando-se o lugar geométrico das impedâncias “vistas” de cada uma delas, através de um histórico de medições realizadas em cada ponto. Em síntese, o lugar geométrico de impedâncias próprias de um determinado barramento consiste em um conjunto de magnitudes e respectivos ângulos de defasagem na frequência considerada.

Uma vez que seria impraticável o dimensionamento de um filtro específico para cada barramento, neste trabalho adotou-se o critério de dimensionamento de um filtro mínimo de forma que seu reativo gerado pudesse

atender à barra com menor carga reativa indutiva. Desta forma, após a aplicação da TEIRE, considerando-se este filtro mínimo, e posterior identificação do barramento ótimo, poder-se-ia dimensionar corretamente o filtro de forma a atender apenas a barra ótima. Em outras palavras, uma vez identificada a barra de ótima alocação para o filtro sintonizado passivo, seriam realizadas as devidas medições de forma a se obter o filtro ótimo, cuja topologia seja adequada para a referida barra.

O princípio lógico desta forma de alocação do filtro mínimo é que, se um determinado barramento apresenta a maior variação percentual, dentre todos os outros, então o mesmo seria verificado para qualquer outro ramo RLC sintonizado em 300 Hz conectado a esta mesma barra. Este fato foi verificado através da simulação de diversos sistemas elétricos e, em todos eles, os resultados confirmaram as expectativas.

Conforme pode ser observado pela tabela 3.1, a barra número 10 é aquela que apresenta a menor carga reativa indutiva do sistema, mais precisamente, 200 kVAr. Desse modo, o filtro mínimo foi dimensionado considerando-se o suprimento de igual potência reativa, ou seja, a potência do capacitor do filtro foi considerado igual a 200 kVAr. A partir deste valor, calculou-se as magnitudes da resistência e da indutância do filtro, de forma a sintonizá-lo em 300 Hz. A figura 3.9 a seguir, ilustra todos os componentes do filtro considerado no presente estudo.

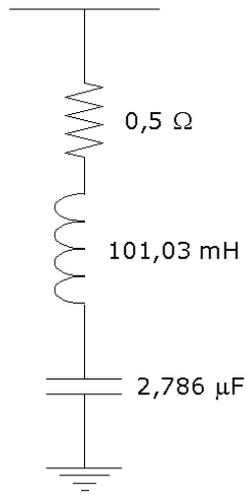


Figura 3.9 – Elementos do filtro considerado para análise empírica.

As curvas de resposta em frequência do módulo e do ângulo da impedância são apresentados nas figuras 3.10 e 3.11, respectivamente.

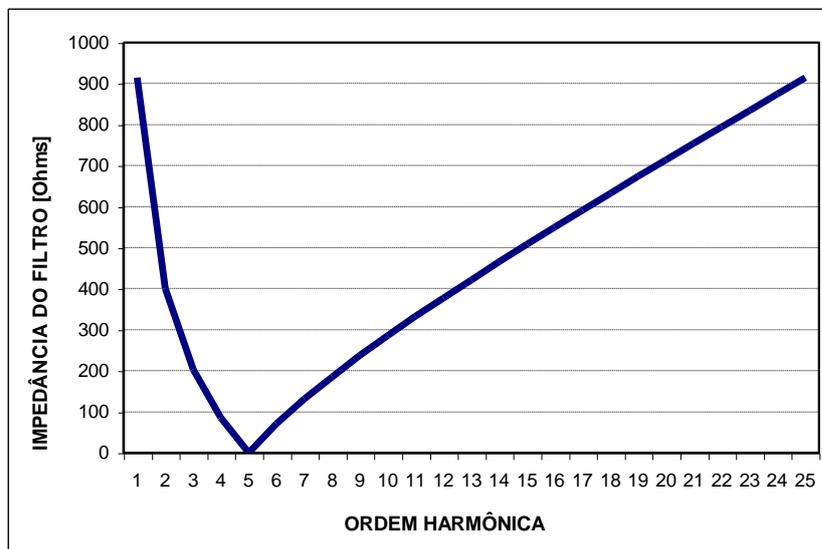


Figura 3.10 – Resposta em frequência da impedância do filtro.

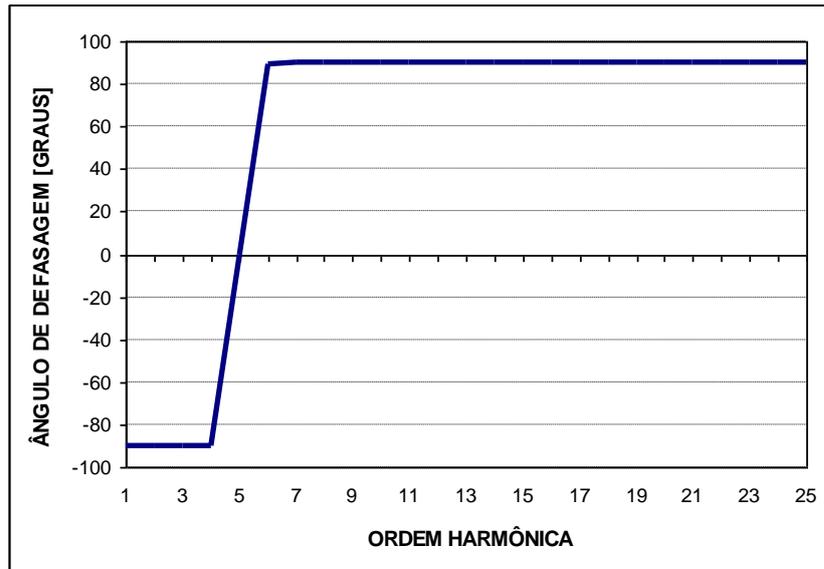


Figura 3.11 – Resposta em frequência do ângulo de defasagem da impedância do filtro.

Após a representação do sistema elétrico em estudo (figura 3.2) no programa de penetração harmônica denominado HARMFLOW, realizou-se a análise de alocação do filtro mínimo considerando-se inicialmente a tensão de 5ª harmônica nas barras do sistemas. Em seguida, o enfoque foi dado à Distorção Harmônica Total de Tensão (DHT_V) em cada barramento. As injeções de correntes harmônicas em cada barramento do sistema foram consideradas a partir de medições reais realizadas em alimentadores de distribuição. A figura 3.12 apresenta um espectro harmônico de correntes típico dos sistemas de distribuição em média tensão.

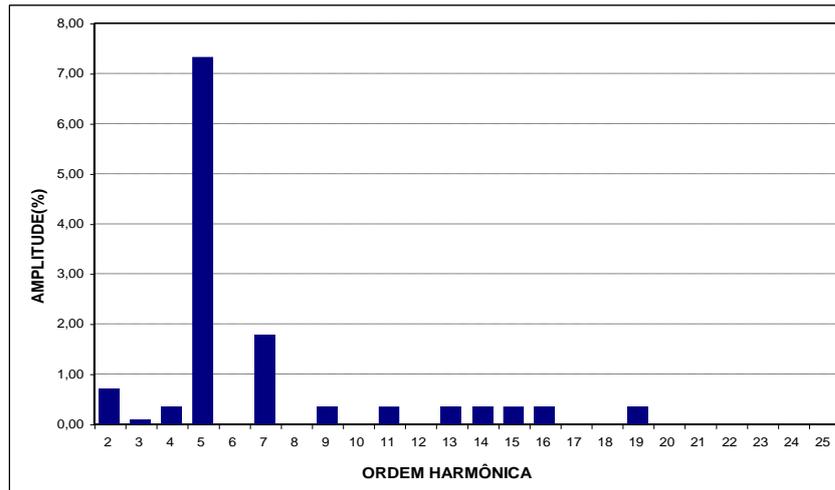


Figura 3.12 – Espectro harmônico de correntes típico dos sistemas de distribuição expresso em percentagem da corrente fundamental.

O processo empírico de análise utilizando-se o HARMFOW foi realizado da seguinte forma:

- 1) Alocou-se o filtro mínimo da figura 3.9 ao primeiro barramento do sistema e executou-se o estudo de penetração harmônica. Os resultados referentes à tensão de 5^a harmônica, assim como, o DHT_V foram então selecionados;
- 2) Alocou-se o filtro mínimo ao segundo barramento do sistema e repetiu-se todos os procedimentos descritos no item 1;
- 3) Após concluído o “deslizamento” do filtro mínimo por todas as barras do sistema, os resultados para a tensão de 5^a harmônica nas barras e também os resultados para DHT_V , foram inseridos em planilhas, a partir das quais procederam-se as análises finais.

As planilhas resultantes, com base nas análises da tensão de 5^a harmônica e da DHT_V , respectivamente, são apresentadas na figuras 3.13 e 3.14, a seguir.

Tensão harmônica de 5ª ordem [%]		Barramento de conexão do filtro																	
		BARRA1	BARRA2	BARRA3	BARRA4	BARRA5	BARRA6	BARRA7	BARRA8	BARRA9	BARRA10	BARRA11	BARRA12	BARRA13	BARRA14	BARRA15	BARRA16	BARRA17	BARRA18
BARRA1	0,08400	0,07300	0,06500	0,05400	0,05300	0,05800	0,10700	0,09600	0,06600	0,17900	0,18800	0,08000	0,12700	0,14100	0,21300	0,22000	0,22900	0,23200	
BARRA2	0,29100	0,09700	0,08600	0,07200	0,07000	0,07700	0,14200	0,12800	0,08800	0,23700	0,25000	0,10600	0,16900	0,18700	0,28200	0,29200	0,30400	0,30800	
BARRA3	0,41400	0,18600	0,10500	0,08800	0,08600	0,09300	0,17300	0,15600	0,10800	0,29000	0,30500	0,12900	0,20600	0,22800	0,34400	0,35600	0,37100	0,37600	
BARRA4	0,74000	0,50800	0,39000	0,11200	0,09800	0,10500	0,21700	0,19000	0,12100	0,40700	0,43200	0,15100	0,27000	0,30600	0,65700	0,66700	0,67900	0,68300	
BARRA5	1,06400	0,84000	0,72500	0,39200	0,11600	0,11900	0,26600	0,52400	0,13600	0,53600	0,57200	0,17500	0,34200	0,39300	0,97900	0,98800	0,99900	1,00200	
BARRA6	1,11600	0,89300	0,78000	0,45000	0,14500	0,11400	0,25700	0,58100	0,12600	0,54600	0,58400	0,16200	0,33800	0,39200	1,03200	1,04000	1,05100	1,05400	
BARRA7	1,19400	0,97400	0,86100	0,53100	0,20600	0,15500	0,09400	0,66300	0,18400	0,62800	0,66600	0,23400	0,42000	0,47500	1,11000	1,11800	1,12900	1,13200	
BARRA8	0,73300	0,50400	0,38600	0,11100	0,09800	0,10400	0,21500	0,09300	0,12000	0,40300	0,42800	0,15000	0,26800	0,30300	0,65100	0,66000	0,67300	0,67600	
BARRA9	1,15300	0,93200	0,82000	0,49200	0,17700	0,13300	0,29900	0,62200	0,11100	0,53500	0,57700	0,13500	0,31300	0,37200	1,06900	1,07700	1,08800	1,09100	
BARRA10	1,13000	0,91400	0,80300	0,48200	0,17300	0,13100	0,29400	0,61000	0,10900	0,06600	0,10200	0,13200	0,30700	0,36400	1,04800	1,05600	1,06700	1,07000	
BARRA11	1,12700	0,91200	0,80200	0,48100	0,17300	0,13000	0,29300	0,60800	0,10900	0,06600	0,06200	0,13200	0,30700	0,36300	1,04600	1,05400	1,06400	1,06700	
BARRA12	1,16600	0,94700	0,83500	0,50900	0,19300	0,14500	0,31800	0,63900	0,11800	0,55300	0,59400	0,10600	0,26400	0,32500	1,08300	1,09100	1,10200	1,10500	
BARRA13	1,25200	1,03600	0,92500	0,60200	0,27600	0,22000	0,41200	0,73100	0,17800	0,64600	0,68600	0,15700	0,08700	0,41900	1,16900	1,17700	1,18800	1,19100	
BARRA14	1,14500	0,93000	0,82000	0,50000	0,18900	0,14300	0,31200	0,62700	0,11500	0,54300	0,58300	0,10400	0,25900	0,08200	1,06300	1,07100	1,08200	1,08500	
BARRA15	0,61300	0,39000	0,27700	0,28300	0,29000	0,29900	0,37900	0,36400	0,31400	0,48400	0,49800	0,33500	0,40800	0,42800	0,05000	0,07400	0,12200	0,13600	
BARRA16	0,64400	0,42300	0,31000	0,31700	0,32400	0,33300	0,41200	0,39700	0,34800	0,51600	0,52900	0,36900	0,44000	0,46000	0,06100	0,04800	0,08900	0,10400	
BARRA17	0,70400	0,48400	0,37200	0,37900	0,38700	0,39500	0,47300	0,45900	0,41000	0,57500	0,58800	0,43100	0,50100	0,52100	0,11300	0,08000	0,04400	0,05400	
BARRA18	0,70300	0,48400	0,37200	0,37900	0,38600	0,39500	0,47300	0,45800	0,41000	0,57500	0,58800	0,43000	0,50100	0,52100	0,11300	0,08000	0,04400	0,04300	

Figura 3.13 - Tensões harmônicas de 5ª ordem quando da alocação do filtro em cada barra do sistema.

DHTv [%]		Barramento de conexão do filtro																	
		BARRA1	BARRA2	BARRA3	BARRA4	BARRA5	BARRA6	BARRA7	BARRA8	BARRA9	BARRA10	BARRA11	BARRA12	BARRA13	BARRA14	BARRA15	BARRA16	BARRA17	BARRA18
		0,37298	0,36320	0,35863	0,34979	0,34324	0,34313	0,35288	0,35854	0,34412	0,38124	0,38564	0,34673	0,35864	0,36553	0,40498	0,40811	0,41217	0,41360
		0,89992	0,83846	0,83104	0,81498	0,80179	0,80069	0,80731	0,82272	0,80087	0,83419	0,83826	0,80295	0,81149	0,82010	0,86618	0,86841	0,87088	0,87220
		1,25481	1,18055	1,15438	1,13273	1,11471	1,11306	1,11984	1,14160	1,11298	1,15113	1,15580	1,11529	1,12426	1,13507	1,19186	1,19413	1,19641	1,19792
		2,26299	2,17739	2,13650	2,02725	1,99181	1,98777	1,99226	2,03664	1,98613	2,03838	2,04535	1,98836	1,99703	2,01539	2,19658	2,19853	2,20035	2,20165
		3,32182	3,23277	3,18726	3,04919	2,91370	2,90724	2,91042	3,07405	2,90414	2,97417	2,98384	2,90654	2,91602	2,94268	3,25540	3,25592	3,25755	3,25877
		3,49712	3,40786	3,36193	3,22119	3,08020	3,05412	3,05554	3,24753	3,05038	3,12233	3,13253	3,05243	3,06104	3,08938	3,42944	3,43126	3,43289	3,43410
		3,75465	3,66504	3,61859	3,47441	3,32654	3,29890	3,20041	3,50269	3,29639	3,37771	3,38832	3,30003	3,31325	3,34246	3,68681	3,68860	3,69020	3,69139
		2,24421	2,15915	2,11853	2,01010	1,97496	1,97095	1,97543	1,98528	1,96933	2,02124	2,02816	1,97155	1,98017	1,99839	2,17827	2,18022	2,18203	2,18333
		3,62751	3,53818	3,49200	3,34956	3,20496	3,17804	3,18265	3,37689	3,15251	3,22372	3,23437	3,15371	3,15998	3,18988	3,55988	3,56169	3,56331	3,56451
		3,59058	3,50189	3,45607	3,31479	3,17151	3,14484	3,14945	3,34192	3,11957	2,95264	2,95883	3,12076	3,12701	3,15662	3,52347	3,52527	3,52689	3,52808
		3,58559	3,49700	3,45123	3,31013	3,16703	3,14040	3,14501	3,33722	3,11516	2,94845	2,92599	3,11635	3,12259	3,15216	3,51855	3,52035	3,52197	3,52316
		3,68180	3,59254	3,54632	3,40334	3,25741	3,23017	3,23610	3,43106	3,20439	3,27808	3,28883	3,18320	3,18503	3,21608	3,61426	3,61606	3,61768	3,61888
		3,97966	3,89006	3,84331	3,69689	3,54409	3,51529	3,52696	3,72652	3,48822	3,57322	3,58447	3,46641	3,35024	3,50721	3,91194	3,91373	3,91532	3,91650
		3,65815	3,56932	3,52334	3,38112	3,23602	3,20894	3,21485	3,40868	3,18331	3,25658	3,26727	3,16224	3,16408	3,08571	3,59091	3,59271	3,59432	3,59551
		1,91868	1,83590	1,79803	1,78017	1,76483	1,76439	1,77878	1,79768	1,76604	1,81375	1,81841	1,77036	1,78477	1,79609	1,62642	1,62274	1,61537	1,61744
		2,02267	1,93933	1,90053	1,88303	1,86796	1,86761	1,88262	1,90123	1,86941	1,91786	1,92250	1,87389	1,88875	1,90009	1,72516	1,69762	1,68764	1,68951
		2,22005	2,13555	2,09521	2,07822	2,06350	2,06332	2,07929	2,09752	2,06534	2,11499	2,11964	2,07008	2,08562	2,09702	1,91357	1,88474	1,82889	1,83026
		2,21939	2,13491	2,09458	2,07759	2,06288	2,06270	2,07867	2,09689	2,06471	2,11435	2,11900	2,06945	2,08499	2,09639	1,91299	1,88416	1,82833	1,82262

Figura 3.14 - DHTv nas barras do sistema quando da alocação do filtro em cada barra do sistema.

Para a busca da barra para a qual obtém-se a maior sensibilidade quando da alocação do filtro, calculou-se a variação entre o maior e o menor valor de tensão de 5ª harmônica encontrado em uma barra quando da alocação do filtro em cada uma delas, conforme equação (3.4), a seguir.

$$\Delta V_5[\%] = \frac{\text{Maior}(V_5\%) - \text{Menor}(V_5\%)}{\text{Maior}(V_5\%)} \quad (3.4)$$

Os resultados encontrados quando da aplicação da equação (3.4), para a tensão de 5ª harmônica nas barras do sistema são apresentados na figura 3.15.

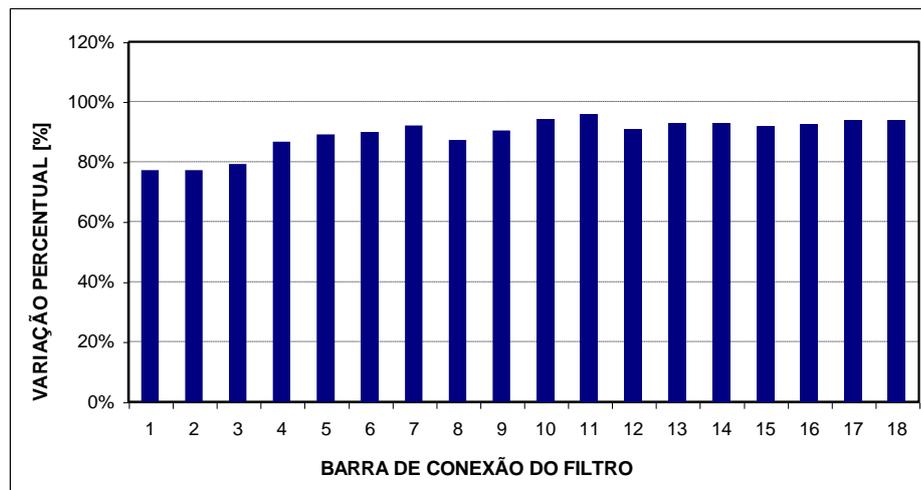


Figura 3.15 – Variação percentual entre a maior e a menor tensão de 5ª harmônica nas barras do sistema quando da conexão do filtro em cada barramento individualmente.

Da análise da figura 3.15, observa-se que a maior variação percentual encontrada ocorre quando da conexão do filtro na barra de número 11 do sistema em análise.

Para análise da DHT_V nas barras da rede elétrica em estudo, quando da alocação do filtro, considerou-se o mesmo procedimento anterior. Entretanto, desta vez aplicou-se a equação (3.4), referente à Distorção Harmônica Total de Tensão. Os resultados encontrados são apresentados na figura 3.16.

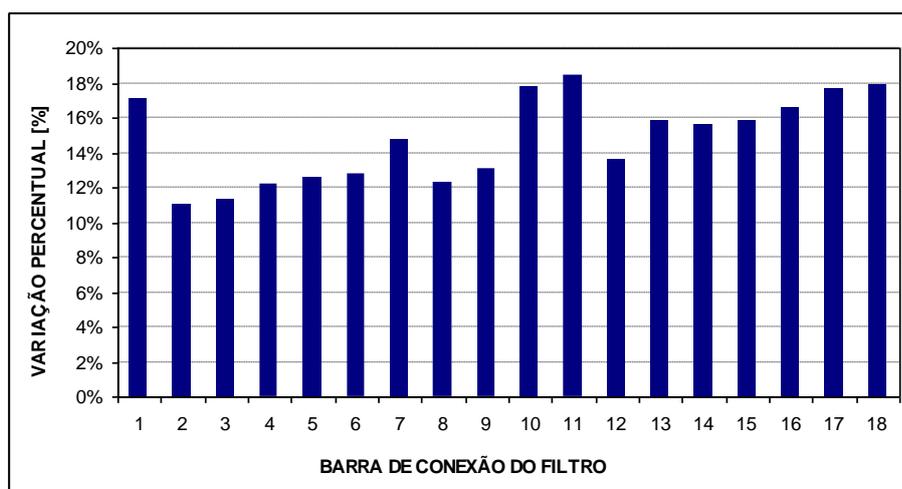


Figura 3.16 – Variação percentual entre a maior e a menor DHT_V nas barras do sistema quando da conexão do filtro em cada barramento individualmente.

Assim como para a análise da tensão de 5ª harmônica, observou-se que a maior variação percentual para a DHT_V ocorreu quando da conexão do filtro na mesma barra do sistema. A de número 11.

Comparando-se estes resultados com aqueles encontrados quando da aplicação da TEIRE, verifica-se que os dois processos convergem para um mesmo barramento ótimo de alocação do filtro harmônico sintonizado passivo.

As figuras 3.17 e 3.18 apresentam uma comparação entre os resultados obtidos quando da aplicação dos dois métodos utilizados: a TEIRE e o método empírico utilizando-se o programa HARMFOW, para análise da tensão de 5ª harmônica e da DHT_V em cada barramento, respectivamente.

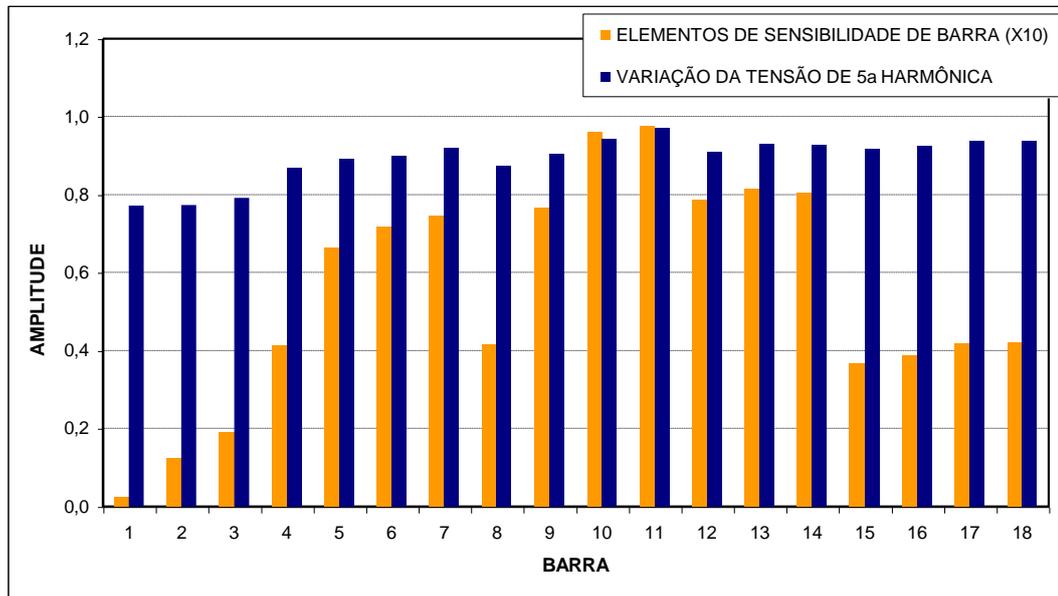


Figura 3.17 – Comparação entre os resultados obtidos através da aplicação da TEIRE e o método empírico para a tensão de 5ª harmônica em cada barramento.

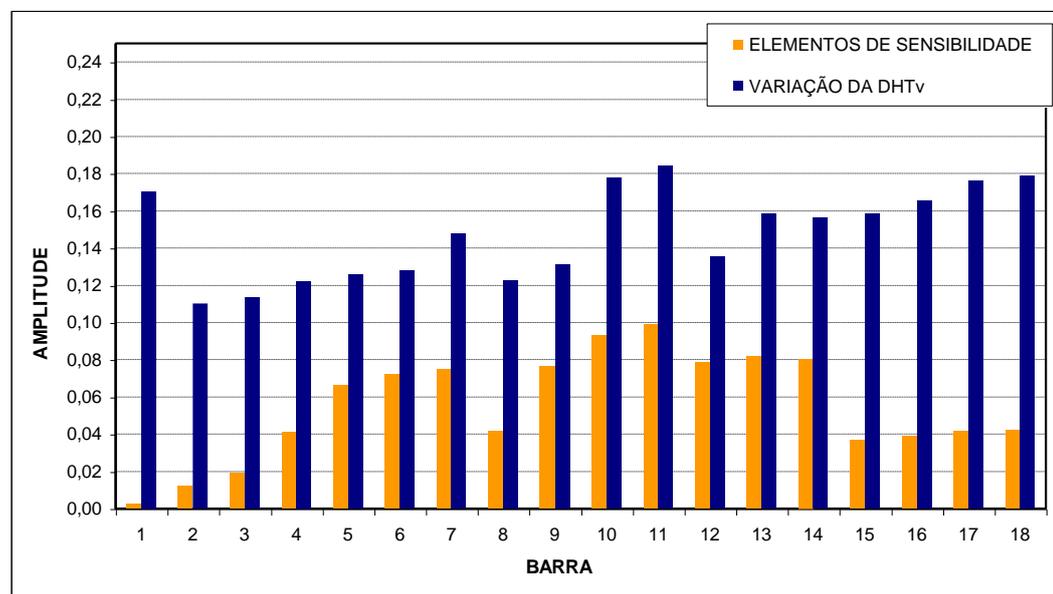


Figura 3.18 – Comparação entre os resultados obtidos através da aplicação da TEIRE e o método empírico para a DHTv em cada barramento.

Conforme pode ser observado pelas figuras 3.17 e 3.18 os resultados obtidos com a utilização da TEIRE são exatamente aqueles obtidos pelo método empírico de análise, utilizando-se o software HARMFLOW.

Vale a pena ressaltar que a solução do problema através do método empírico é extremamente trabalhosa e despende bastante tempo dos analistas de planejamento dos sistemas elétricos de potência. Assim, a aplicação da TEIRE se resume em uma poderosa ferramenta para alocação ótima de filtros sintonizados passivos em redes de distribuição.

3.4 – CONCLUSÃO

Neste capítulo foram abordados todos os passos para aplicação da Teoria de estruturas Aplicadas a Redes Elétricas em sistemas de distribuição, visando, especificamente, a alocação ótima de filtros harmônicos passivos. A consolidação desta teoria foi realizada com a utilização de métodos empíricos de análise e os resultados apresentados em ambos os processos foram consistentes. A grande vantagem em se utilizar a TEIRE em substituição às metodologias atualmente existentes resume-se na eficiência, no baixo esforço computacional, e na rapidez com as quais são alcançados os resultados finais.

No próximo capítulo, a TEIRE será testada considerando-se a alocação de capacitores de potência, na frequência fundamental, com o objetivo de maximização dos níveis médios de tensão nos barramentos da rede e na minimização das perdas elétricas

CAPÍTULO 4

ALOCAÇÃO ÓTIMA DE BANCOS DE CAPACITORES

4.1 – INTRODUÇÃO

A alocação de bancos de capacitores em derivação nos sistemas elétricos é uma técnica há muito praticada pelos planejadores dos sistemas de energia elétrica. A questão fundamental deste procedimento é a escolha do melhor ponto da rede para alocação destes equipamentos. Em outras palavras, busca-se o ponto para o qual a conexão do banco de capacitores resultará nos maiores níveis de tensão nas barras e, principalmente, o mínimo percentual de perdas por Efeito Joule nas linhas.

Conforme abordado no Capítulo 1 deste trabalho, muitas são as metodologias aplicadas para este propósito, e vão desde o procedimento elementar de “*Tentativa e Erro*” até as modernas ferramentas utilizando-se Programação Não-linear, Redes Neurais, Lógica *Fuzzy*, entre outras.

Estas metodologias, no entanto, resultam um volume muito grande de trabalho manual, no caso da técnica de “*Tentativa e Erro*”, ou em um alto nível de complexidade matemática e computacional com a aplicação das metodologias mais recentes.

Neste contexto, a Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas assume um papel importante nos estudos de alocação ótima de bancos de capacitores. Esta teoria, além de não requerer grande trabalho manual, requer pouco esforço

computacional ou matemático, devido a maior simplicidade do método em relação às metodologias mais modernas.

Dessa forma, o presente capítulo abrangerá a aplicação da TEIRE na alocação ótima de bancos de capacitores em sistemas radiais de distribuição e, também, em sistemas com topologia em anel, como os sistemas de subtransmissão de energia elétrica. Mais especificamente, serão estudados 6 (seis) casos distintos de alocação. São eles:

- CASO A.1 – Sistema elétrico radial e análise por método empírico (Execução de sucessivos fluxos de carga);
 - CASO A.2 – Sistema elétrico radial e análise através da TEIRE;
 - CASO B.1 – Sistema elétrico em anel e análise por método empírico;
 - CASO B.2 – Sistema elétrico em anel e análise através da TEIRE.
 - CASO C.1 – Sistema elétrico em anel do CASO B modificado, e análise por método empírico;
 - CASO C.2 – Sistema elétrico em anel do CASO B modificado, e análise através da TEIRE.
-

4.2 – ALOCAÇÃO ÓTIMA DE CAPACITORES EM ALIMENTADORES RADIAIS DE DISTRIBUIÇÃO

Conforme abordado no capítulo 3, a exatidão da TEIRE está diretamente relacionada com a esparsidade da matriz de admitâncias do sistema elétrico em estudo. De uma maneira geral, a esparsidade de uma matriz está relacionada com a quantidade de elementos nulos existentes na mesma. Assim, quanto maior o número de elementos nulos em uma matriz, para uma ordem específica, maior será sua esparsidade. Para sistemas radiais, como os alimentadores de distribuição, nos quais as matrizes de admitâncias têm um alto grau de esparsidade, os resultados obtidos pela TEIRE serão muito precisos, podendo-se, até mesmo, concluir a aplicação do método logo nas primeiras etapas do processo, dependendo do grau de esparsidade da matriz admitância associada ao alimentador.

O grau de esparsidade da matriz de admitâncias de uma rede elétrica aumenta na medida em que aumentam o número de derivações, ou ramificações, nas linhas que compõem o alimentador. Por este motivo, os sistemas com configurações em anel possuem matrizes de admitância de rede bem menos esparsas que as matrizes associadas aos sistemas radiais.

Para que se possa associar a exatidão da TEIRE à esparsidade da matriz de admitância relacionada a cada sistema elétrico, define-se aqui o *Grau de Esparsidade*. Para os propósitos deste trabalho, considerar-se-á este indicador (*GE*) como sendo o quociente entre o número de elementos nulos da matriz de admitâncias e o quadrado do número de barras do sistema elétrico em análise, conforme equação (4.1).

$$GE[\%] = \frac{nz}{nb^2} \cdot 100 \quad (4.1)$$

onde:

nz = Número de elementos nulos da matriz de admitâncias;

nb = Número de barras do sistema elétrico;

As implicações do *Grau de Esparsidade* na aplicação da TEIRE será retomado um pouco mais adiante. Retornando-se, portanto, ao processo de alocação ótima de bancos de capacitores utilizando-se a TEIRE tem-se que, da mesma forma que para a alocação ótima de filtros harmônicos passivos, o mesmo pode ser organizado em passos sequenciais, sistematizando-se, deste modo, o processo de utilização da teoria. A figura 4.1 apresenta o fluxograma básico dos passos para aplicação da metodologia na alocação ótima de bancos de capacitores em derivação.

Para os estudos de alocação ótima de bancos de capacitores, todas as variáveis são tratadas na frequência fundamental, uma vez que o principal objetivo destes estudos é a minimização das perdas Joule nas linhas e a elevação dos níveis médios de tensão nas barras de um determinado sistema elétrico.

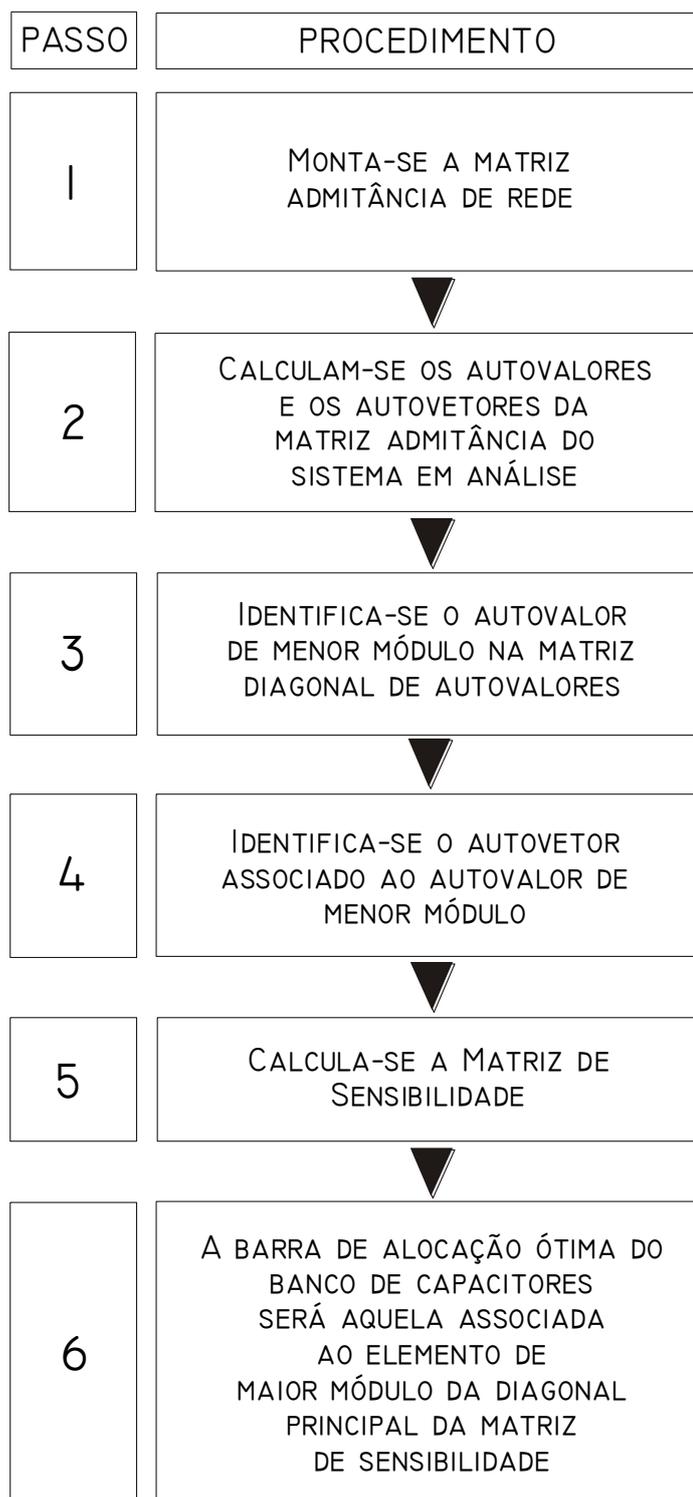


Figura 4.1 – Fluxograma de aplicação da TEIRE para alocação ótima de bancos de capacitores.

4.2.1) CASO A.1 – SISTEMA ELÉTRICO RADIAL (ANÁLISE ATRAVÉS DE MÉTODO EMPÍRICO)

Neste tópico, será utilizado um sistema real de distribuição de energia elétrica, na tensão de 13,8 kV. Em verdade, utilizou-se aqui um alimentador originado do mesmo barramento do qual se originou o alimentador de distribuição utilizado no capítulo 3. A aplicação da metodologia neste sistema visará a busca do barramento de ótima alocação de um banco de capacitores de 900 kVAr, visando-se a minimização das perdas elétricas ao longo dos condutores do referido alimentador. O diagrama unifilar do alimentador em análise é indicado na figura 4.2, a seguir.

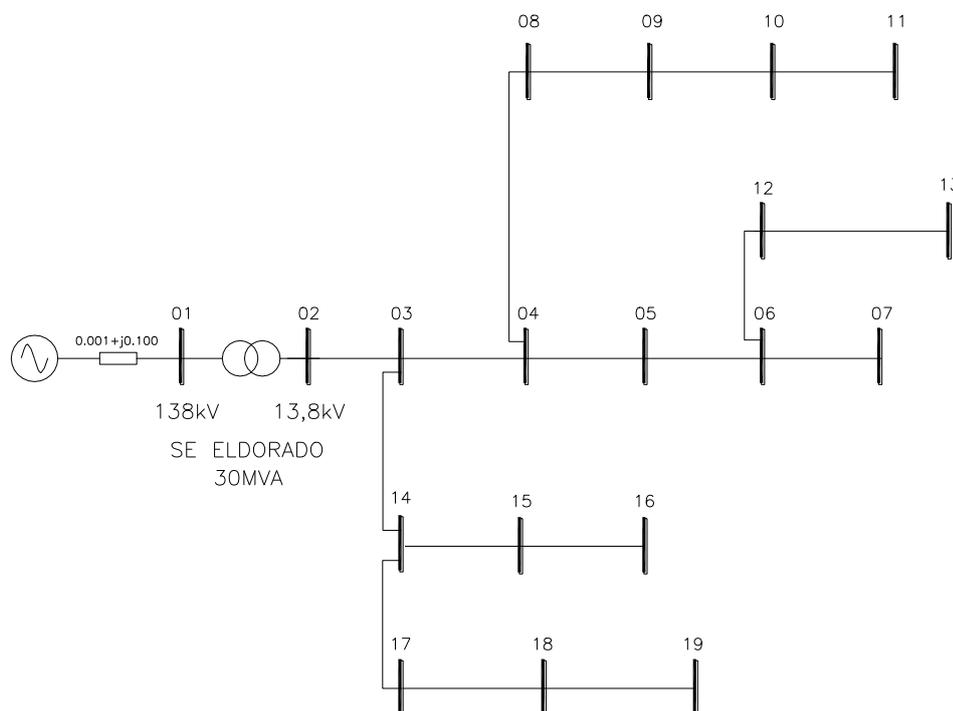


Figura 4.2 – Diagrama unifilar do alimentador em estudo.

Inicialmente, o sistema indicado na figura 4.2 não possui nenhum tipo de compensação reativa ao longo de sua extensão. Assim, para se conhecer o estado inicial do sistema, realizou-se um estudo de fluxo de carga de forma a se obter os perfis de tensão, assim como, os níveis de perdas Joule ao longo de toda sua extensão.

Os dados de barra e de linha do alimentador são indicados nas tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1 – Dados de barra do alimentador.

BARRA	P [MW]	Q [MVar]
4	1,20	0,86
5	0,85	0,65
6	0,60	0,40
7	1,86	1,03
8	3,64	1,86
9	1,46	0,90
10	3,54	2,69
11	2,10	1,60
13	2,70	1,91
14	2,60	1,80
15	0,85	0,63
16	1,41	0,98
17	1,80	1,27
18	1,28	0,79
19	1,30	0,89

Tabela 4.2 – Dados de linha do alimentador.

DA BARRA	PARA BARRA	R (pu)	X(pu)
1	2	0,0001	0,1300
2	3	0,0152	0,0575
3	4	0,0352	0,1852
4	5	0,0163	0,0876
5	6	0,0470	0,1737
6	7	0,0134	0,0379
6	12	0,0481	0,1763
12	13	0,0109	0,0414
4	8	0,0140	0,0420
8	9	0,0600	0,1120
9	10	0,0424	0,1233
10	11	0,0159	0,0499
3	14	0,1802	0,2524
14	15	0,0314	0,0746
15	16	0,0217	0,0595
15	17	0,0116	0,0236
17	18	0,0106	0,0207
18	19	0,0086	0,0236

Após a realização do estudo de fluxo de carga, obteve-se os perfis de tensão indicados no gráfico da figura 4.3. Da análise deste gráfico, pode-se observar que as barras 10, 11, 12 e 13 apresentam tensões com patamares próximos a 95% da tensão nominal do sistema. Dessa forma, é evidente a necessidade de alguma compensação reativa ao longo do alimentador de distribuição em estudo de forma a elevar os níveis de tensão nos barramentos.

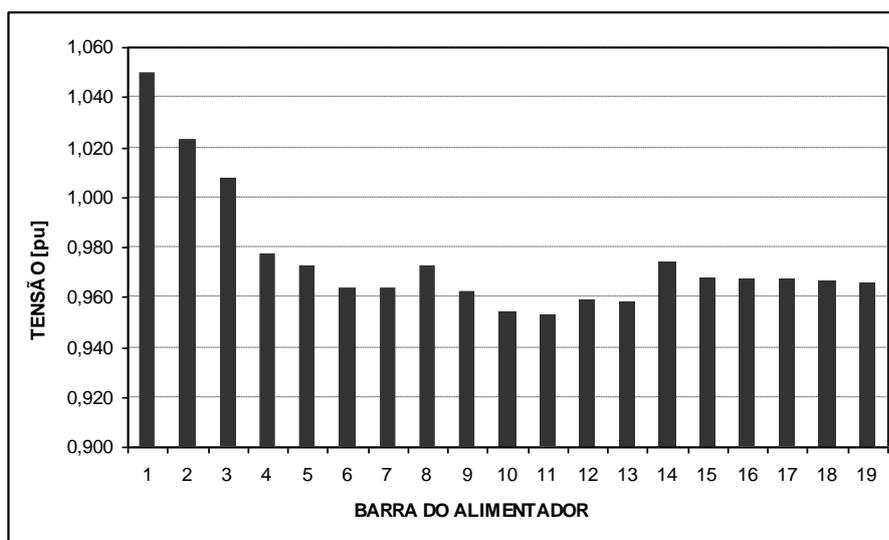


Figura 4.3 – Perfis de tensão ao longo do alimentador.

Uma outra solução para o problema verificado seria a instalação de um Regulador de Tensão em algum ponto do alimentador, entretanto, observando-se o enfoque principal do presente trabalho, considerar-se-á a alocação de bancos de capacitores em derivação para aumento dos níveis de tensão a valores mais adequados.

Inicialmente, buscar-se-á a barra de ótima alocação para o banco de capacitores em derivação utilizando-se o método da “*Tentativa e Erro*”, que consiste na execução de sucessivos estudos de fluxo de carga, considerando-se o banco de capacitores em cada um dos barramentos do sistema. Após a identificação da barra de ótima alocação, a TEIRE será aplicada ao problema e

os resultados obtidos serão comparados com os obtidos através da análise empírica.

No processo de busca da barra de ótima alocação do banco de capacitores, deve-se ter em mente que a diretriz principal do estudo é a minimização das perdas Joule nas linhas do alimentador considerado.

A figura 4.4, a seguir, ilustra as perdas Joule ao longo do alimentador quando da conexão do banco de capacitores em cada um dos barramentos do sistema.

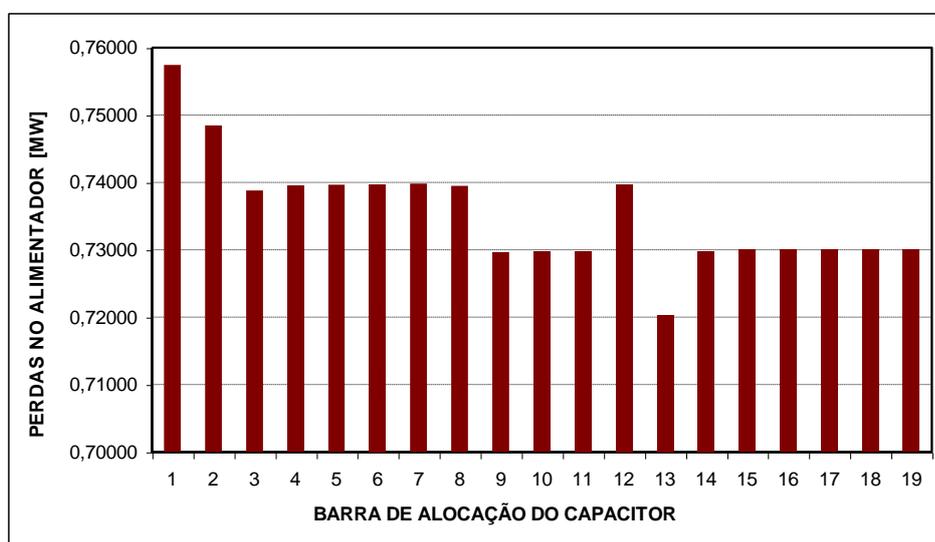


Figura 4.4 – Perdas Joule no alimentador x barra de alocação do banco de capacitores.

Da análise da figura 4.4, verifica-se que a barra 13 é aquela para a qual as perdas no sistema são minimizadas quando da alocação de um banco de capacitores em derivação.

Uma outra análise pertinente é a tensão média do sistema quando da conexão do banco de capacitores em cada um de seus barramentos. A figura 4.5, abaixo, ilustra esta situação.

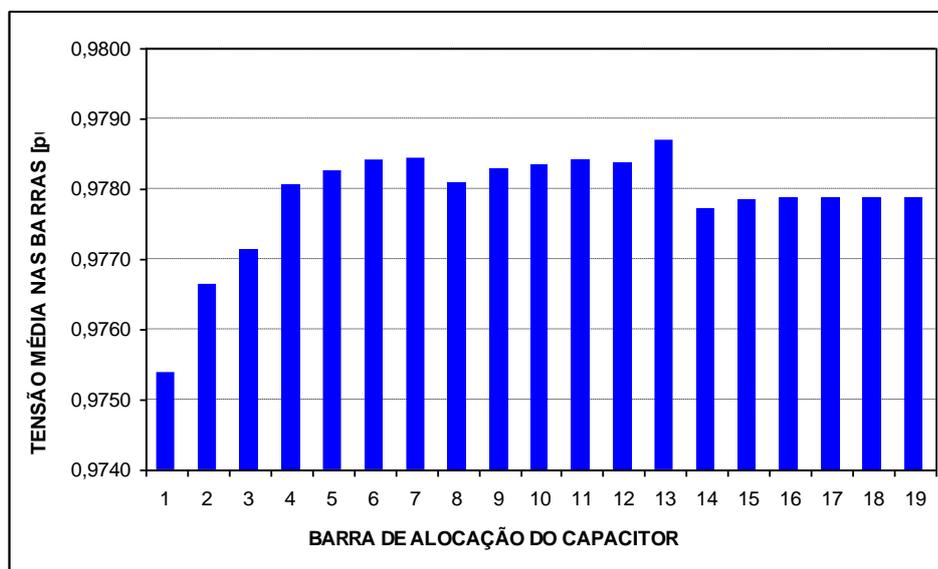


Figura 4.5 – Tensão média nas barras x barra de alocação do banco de capacitores.

De acordo com o verificado na figura 4.5, a mesma barra que minimiza as perdas Joule no alimentador (sistema de topologia radial) quando da alocação do banco de capacitores, maximiza a tensão média nas barras do sistema.

De posse desses dados, faz-se interessante a comparação entre as tensões nas barras do sistema sem compensação e as tensões nos barramentos do sistema compensado, com o banco de capacitores conectado à barra 13. A figura 4.6 mostra esta comparação.

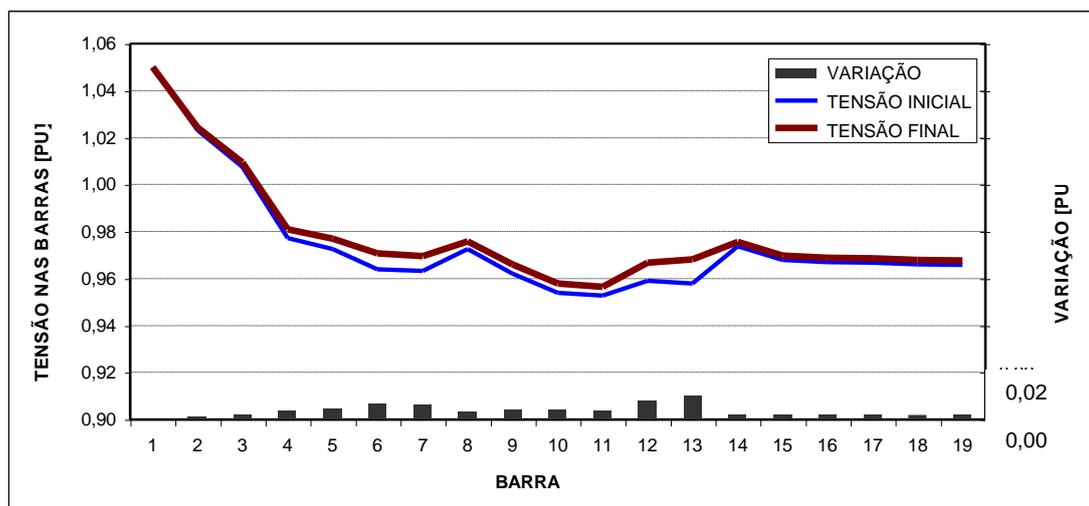


Figura 4.6 – Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 13.

Uma vez analisado o problema utilizando-se de métodos tradicionais, o qual indicou a barra de número 13 como a barra ótima para alocação do banco de capacitores, cabe agora a mesma análise considerando-se, entretanto, a aplicação da TEIRE.

4.2.2) CASO A.2 – SISTEMA ELÉTRICO RADIAL – ANÁLISE ATRAVÉS DA APLICAÇÃO DA TEIRE

De acordo com o fluxograma da figura 4.1, o primeiro passo após a montagem da matriz admitância é o cálculo dos autovalores e autovetores desta mesma matriz.

Os autovalores da matriz admitância estão indicados na figura 4.7, a seguir. Os elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo estão indicados na figura 4.8.

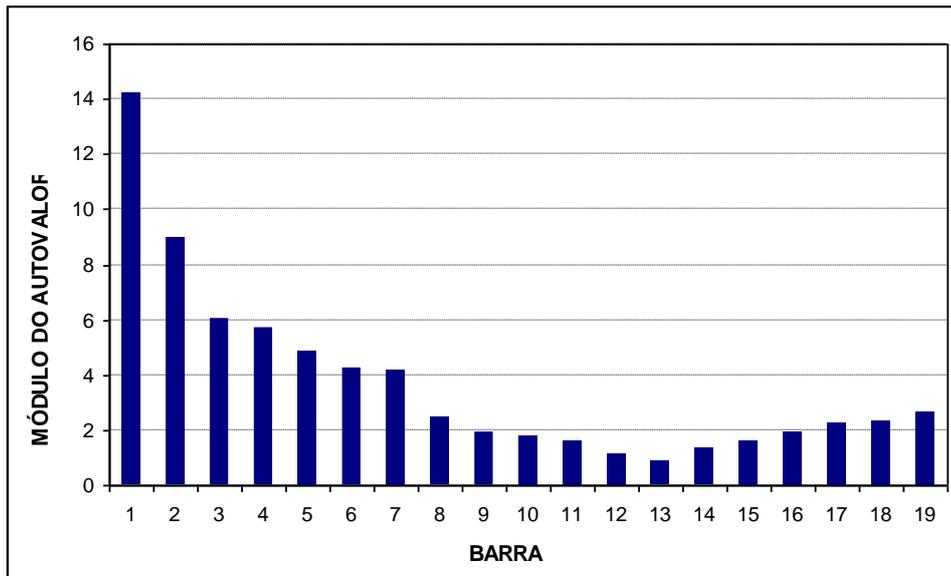


Figura 4.7 – Módulo dos autovalores da matriz admitância.

Da análise da figura 4.7, verifica-se que o menor autovalor da matriz de admitância é aquele associado ao barramento de número 13 do sistema elétrico em estudo. Desse modo, conforme exposto no capítulo 2, o autovetor associado ao 13º autovalor da matriz admitância tem grande significado na TEIRE, uma vez que é a partir desse autovetor que se determina a matriz de sensibilidade do sistema [S].

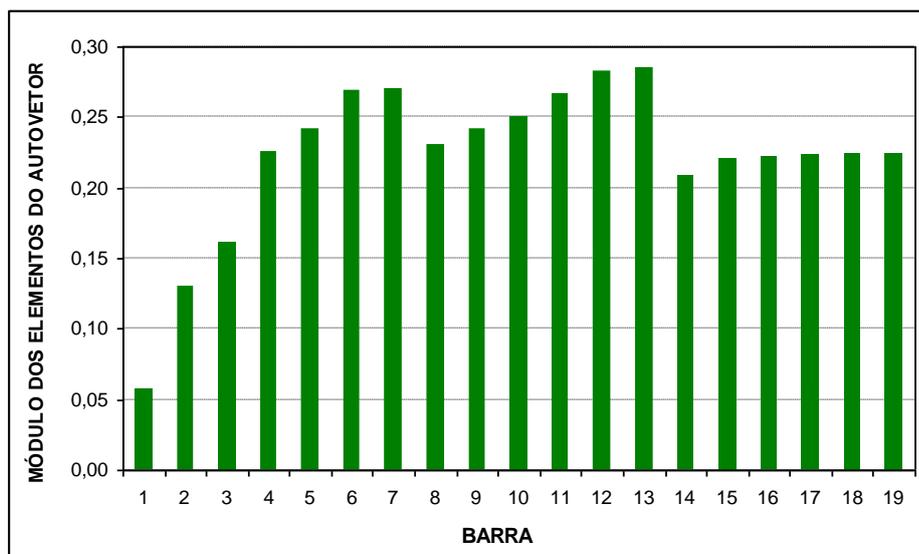


Figura 4.8 – Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância.

De posse do autovetor associado ao autovalor de menor módulo procede-se ao cálculo da Matriz de Sensibilidade [S] do sistema elétrico. Os elementos da diagonal principal desta matriz, indicados na figura 4.9, representam a sensibilidade própria de barra, a qual indicará a barra ótima para alocação de elementos em derivação.

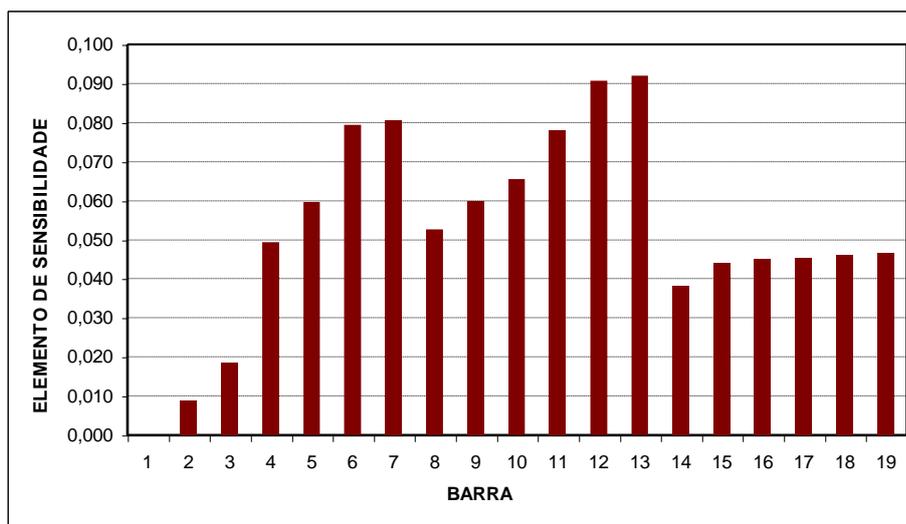


Figura 4.9 – Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade.

Conforme abordado no início deste capítulo, a exatidão da TEIRE está diretamente relacionada com a esparsidade da matriz de admitâncias do sistema elétrico. O alimentador de distribuição em estudo neste tópico possui 19 barras, portanto, a ordem de sua matriz de admitâncias será também igual a 19. Assim, tem-se nesta matriz um total de 361 elementos, dos quais 306 são iguais a zero. Desse modo, pela equação (4.1) tem-se que:

$$GE[\%] = \frac{306}{19^2} \cdot 100 = 84,765\%$$

Onde GE[%] é o Grau de Esparsidade da matriz de admitâncias.

Um Grau de Esparsidade de 84,765% confere à TEIRE uma precisão muito boa, de tal forma que a aplicação da mesma poderia, até mesmo, ter sido

encerrada logo após o cálculo dos autovalores da matriz admitância. Observando-se a figura 4.7, verifica-se que o menor autovalor da matriz admitância é exatamente o autovalor associado à barra de número 13. Assim como, indicado pelos módulos dos elementos da diagonal da Matriz de Sensibilidade, mostrados na figura 4.9. No tópico anterior, onde se fez a análise do problema através de um método empírico, a barra ótima encontrada foi exatamente a mesma obtida pela aplicação da TEIRE.

Para melhor ilustrar a exatidão da metodologia, para o Grau de Esparsidade da matriz admitância do sistema em análise, apresenta-se a seguir as curvas dos módulos das tensões médias nas barras, obtidas pelo método empírico; dos módulos dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo e, ainda, dos módulos dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade de barra [S].

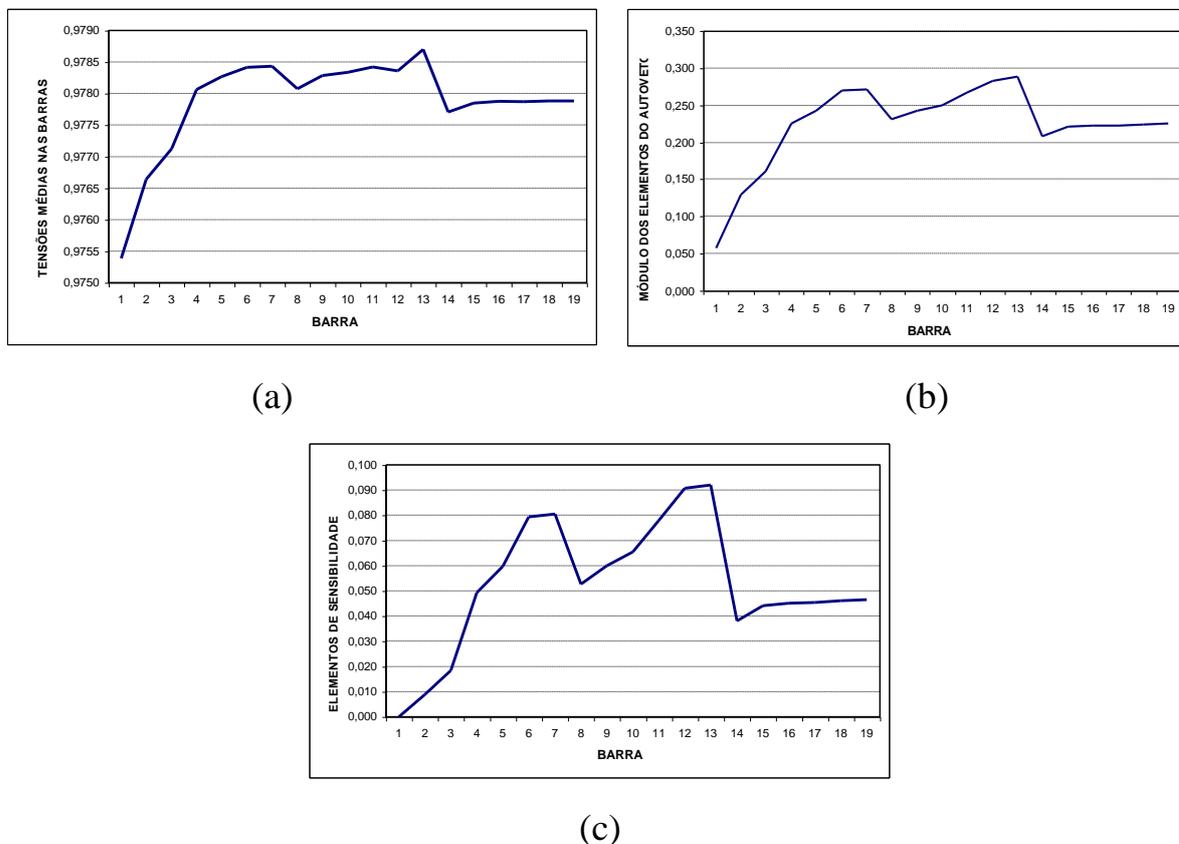


Figura 4.10 – Comparação entre os resultados encontrados. (a) Módulo das tensões médias nas barras obtidas por método empírico; (b) Módulo dos elementos do autovetor associado e (c) Módulo dos elementos de sensibilidade de barra.

Conforme pode ser observado pela análise da figura 4.10, para todos os casos tem-se um máximo valor associado, justamente, à barra de número 13. Observa-se, ainda, que as três curvas apresentam um “comportamento” semelhante.

Este paralelo é válido, entretanto, somente para sistemas elétricos cuja matriz de admitância tem alto Grau de Esparsidade. Assim, devido à simplicidade da TEIRE aconselha-se sempre concluir a metodologia pela determinação da Matriz de Sensibilidade [S].

4.2.3) CASO B.1 – SISTEMA ELÉTRICO EM ANEL – ANÁLISE ATRAVÉS DE MÉTODO EMPÍRICO

Na seção anterior, o estudo de alocação ótima de um banco de capacitores, para minimização de perdas elétricas, foi realizado para um sistema radial típico dos sistemas de distribuição. Portanto, o estudo anterior considerou um sistema cuja matriz admitância possui um alto Grau de Esparsidade (GE). Agora, para uma que se tenha uma abordagem mais generalizada da TEIRE, estudar-se-á um sistema elétrico com Grau de Esparsidade um pouco menor, como aquele associado aos sistemas elétricos dispostos em anel, característicos dos sistemas de subtransmissão de energia elétrica.

O diagrama unifilar do sistema elétrico a ser estudado neste tópico está indicado na figura 4.11, a seguir.

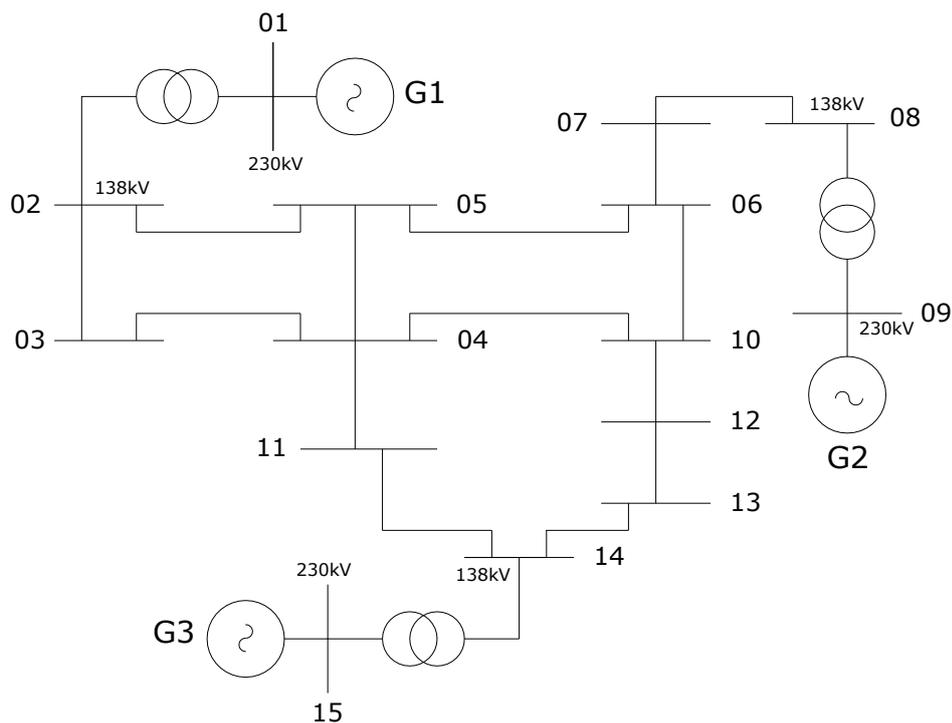


Figura 4.11 – Diagrama unifilar do sistema elétrico em estudo.

Inicialmente, para se conhecer o estado inicial do sistema, realizou-se um estudo de fluxo de carga de forma a se obter os perfis de tensão e, também, os níveis de perdas Joule ao longo de toda sua extensão.

Os dados de barra e de linha do sistema elétrico são indicados nas tabelas 4.3 e 4.4, respectivamente.

Tabela 4.3 – Dados de barra do sistema elétrico em anel.

BARRA	P _G [MW]	Q _G [MVar]	P _L [MW]	Q _L [MVar]
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	18,30	9,80
4	0,00	0,00	12,00	8,60
5	0,00	0,00	8,50	6,50
6	0,00	0,00	16,00	9,70
7	0,00	0,00	18,60	10,30
8	0,00	0,00	36,40	18,60
9	70,00	45,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	22,40	12,90
11	0,00	0,00	21,00	16,00
12	0,00	0,00	6,00	4,00
13	0,00	0,00	27,00	19,10
14	0,00	0,00	26,00	18,00
15	40,00	28,00	0,00	0,00

Tabela 4.4 – Dados de linha do sistema elétrico em anel.

DA BARRA	PARA BARRA	R	X(60Hz)
1	2	0,00001	0,10000
2	3	0,01520	0,05750
3	4	0,03520	0,18520
4	5	0,01630	0,08760
2	5	0,04700	0,17370
5	6	0,01341	0,03790
6	7	0,04810	0,17630
7	8	0,01090	0,04140
8	9	0,01400	0,04200
4	10	0,06000	0,11200
6	10	0,20230	0,28210
4	11	0,04241	0,12320
10	12	0,01590	0,04990
12	13	0,18020	0,25240
11	14	0,03140	0,07460
13	14	0,02171	0,05950
14	15	0,01160	0,02362

Inicialmente, sem a compensação reativa, o sistema apresenta os perfis de tensão indicados na figura 4.12. Da análise desta figura observa-se que a barra 10 é aquela que apresenta o menor módulo de tensão. As tensões nas barras de geração (1, 9 e 15) são constantes e iguais a 1,05 pu.

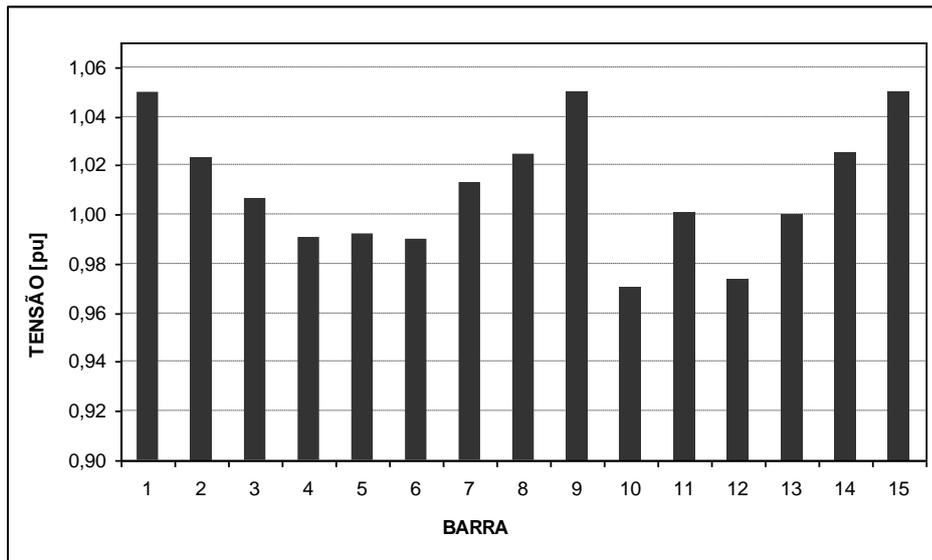


Figura 4.12 – Perfis de tensão nas barras do sistema elétrico.

Mais uma vez, o objetivo do estudo é alocar um banco de capacitores em uma das barras do sistema elétrico de forma a minimizar as perdas ao longo das linhas que o compõem. Para tal efeito, foi alocado através do método empírico, ou seja, execução de sucessivos estudos de fluxo de carga, um banco de capacitores em derivação com uma potência de 10 MVar. Deste modo, após a alocação do banco de capacitores em cada uma das barras do sistema, obteve-se o resultado mostrado na figura 4.13.

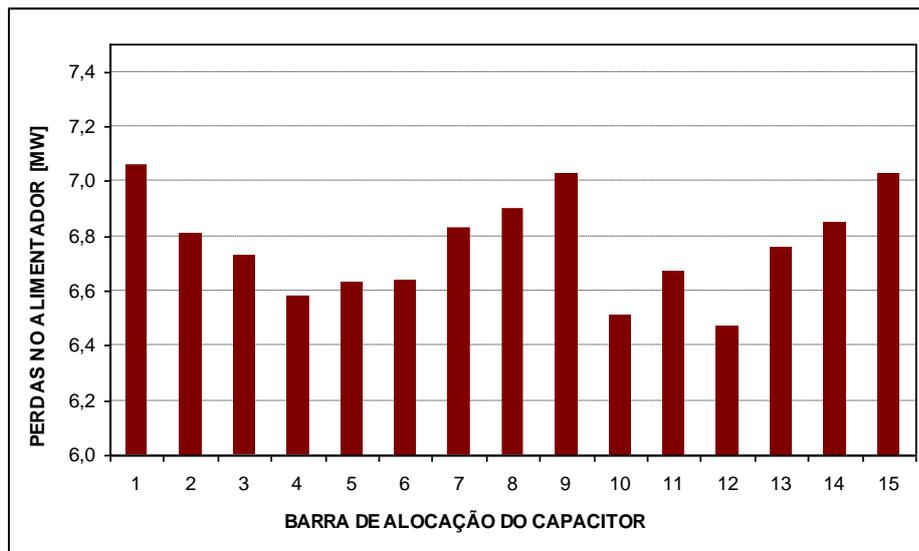


Figura 4.13 – Perdas Joule nas linhas do sistema elétrico x Barra de alocação do banco de capacitores.

Da análise da figura anterior, verifica-se que quando da alocação do banco de capacitores na barra 12, obtém o menor nível absoluto de perdas Joule em todo o sistema elétrico. Portanto, conforme observado pela metodologia da “tentativa e erro”, processo empírico, tem-se que a barra de número 12 é ótima sob o ponto de vista de alocação de um banco de capacitores de 10 MVAR para minimização de perdas elétricas.

Paralelamente aos valores de perdas, em MW, pode-se representar em um gráfico as tensões médias nas barras quando da alocação do banco de capacitores em cada uma delas. A figura 4.14 representa esta análise.

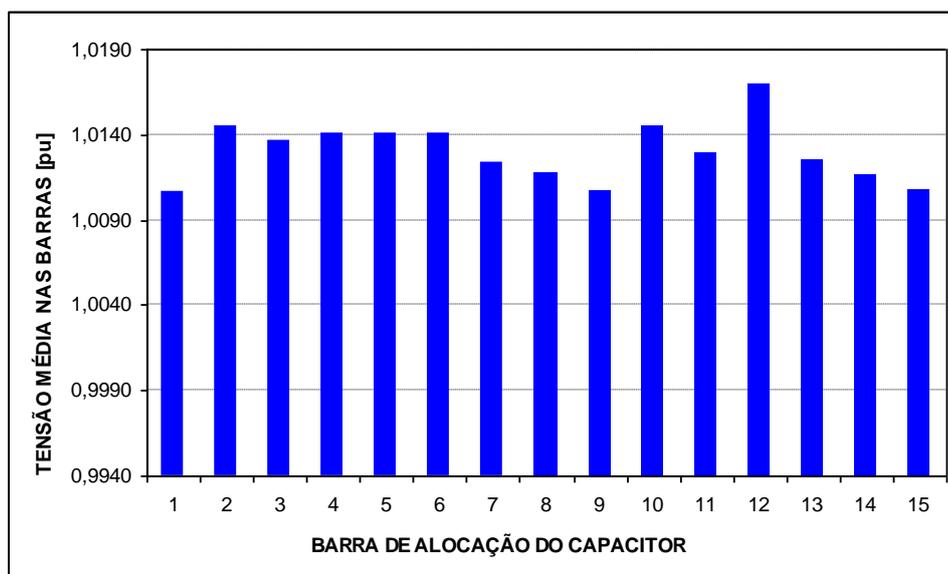


Figura 4.14 – Tensão média nas barras x barra de alocação do banco de capacitores.

Conforme esperado, a barra para a qual a alocação do banco de capacitores resulta o menor nível de perdas do sistema, também resulta a maior média global das tensões da rede elétrica.

Considerando-se somente as tensões nas barras do sistema antes da compensação reativa, assim como, as tensões nas barras após a alocação do banco de capacitores na barra 12 (barra ótima), pode-se avaliar a variação da

tensão em cada uma das barra antes e após a compensação, conforme mostrado na figura 4.15.

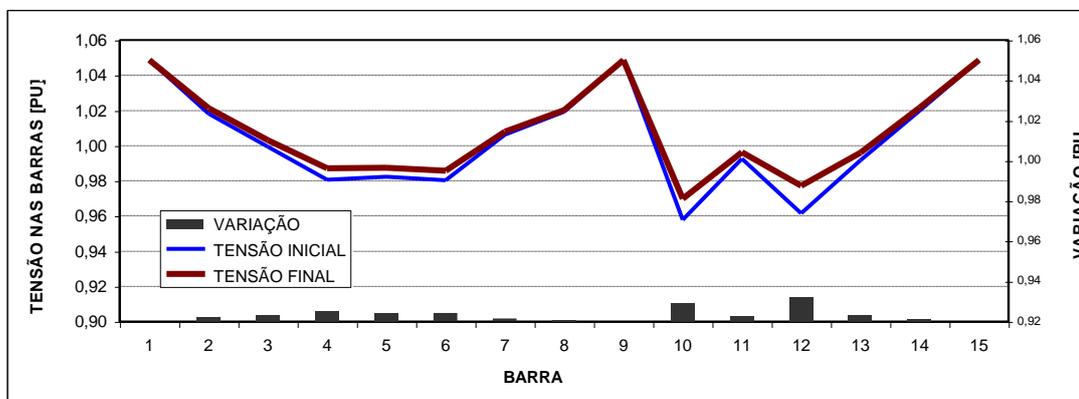


Figura 4.15 – Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 12

A figura 4.15, mostra que a variação da tensão em cada barramento também tem um máximo para a alocação do banco de capacitores na barra 12. Este fato indica que o barramento de número 12 é aquele de maior sensibilidade, sob o aspecto da tensão, em todo o sistema elétrico considerado.

Após obtidos os resultados utilizando-se a metodologia da “*tentativa e erro*”, o tópico seguinte resolverá o mesmo problema, porém, utilizando-se a TEIRE como ferramenta de análise. Vale lembrar, que para o processo empírico utilizado nesta seção, foi necessária a execução de 15 (quinze) estudos de fluxo de carga, o que confere um esforço computacional relativamente grande em relação à TEIRE, principalmente para grandes sistema elétricos.

4.2.4) CASO B.2 – SISTEMA ELÉTRICO EM ANEL – ANÁLISE ATRAVÉS DA TEIRE

Inicialmente, para efeito de análise e comparação, é interessante calcular o Grau de Esparsidade (GE) do sistema elétrico em estudo. O sistema em anel aqui analisado, possui 15 barras, portanto, a ordem de sua matriz de admitâncias será também igual a 15. Desta forma, tem-se nesta matriz um total de 225 elementos, dos quais 176 são iguais a zero. Desse modo, pela equação (4.1) tem-se que:

$$GE[\%] = \frac{176}{15^2} \cdot 100 = 78,222\%$$

Onde $GE[\%]$ é o Grau de Esparsidade da matriz de admitâncias.

Um Grau de Esparsidade de 78,222% ainda confere à TEIRE uma boa precisão, de forma a ser possível a conclusão do estudo logo após o cálculo dos autovalores da matriz admitância. Mesmo assim, realizar-se-á a aplicação da TEIRE conforme fluxograma apresentado na figura 4.1.

Desta forma, portanto, o primeiro passo após a montagem da matriz admitância da rede será o cálculo dos autovalores associados a esta matriz. A figura 4.16, a seguir, apresenta os módulos dos autovalores associados a cada barramento do sistema elétrico em estudo.

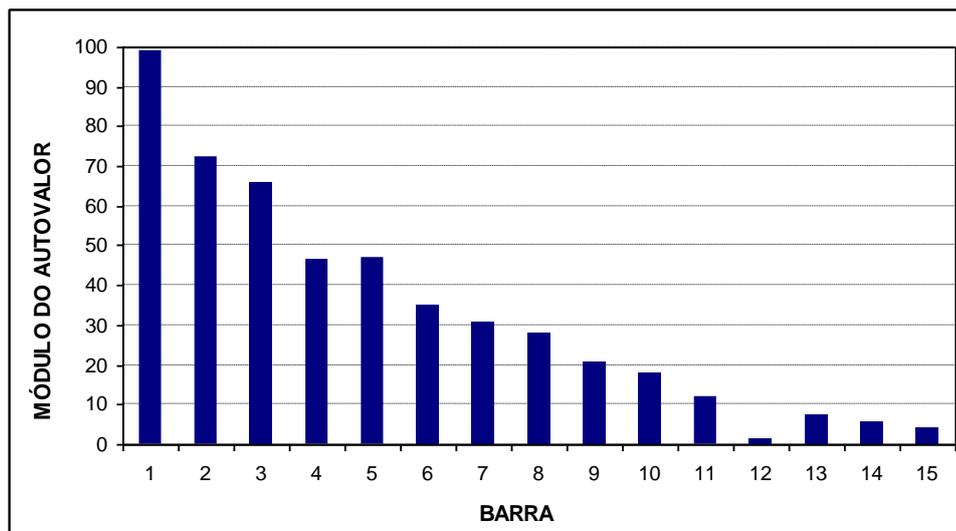


Figura 4.16 – Módulo dos autovalores da matriz admitância.

Se fosse possível uma associação da exatidão da TEIRE ao Grau de Esparsidade da matriz de admitâncias, poderia-se concluir por antecipação que a barra 12 seria aquela que, quando da alocação do banco de capacitores, minimizaria as perdas Joule no sistema. Entretanto, esta associação só será feita a partir do tópico seguinte, onde a barra associada ao elemento de menor autovalor não será a mesma associada ao elemento de maior sensibilidade da matriz [S].

Seguindo-se os passos do fluxograma da figura 4.1, tem-se agora o cálculo dos autovetores associados ao autovalor de menor módulo da matriz de admitâncias da rede, conforme ilustrado na figura 4.17, a seguir.

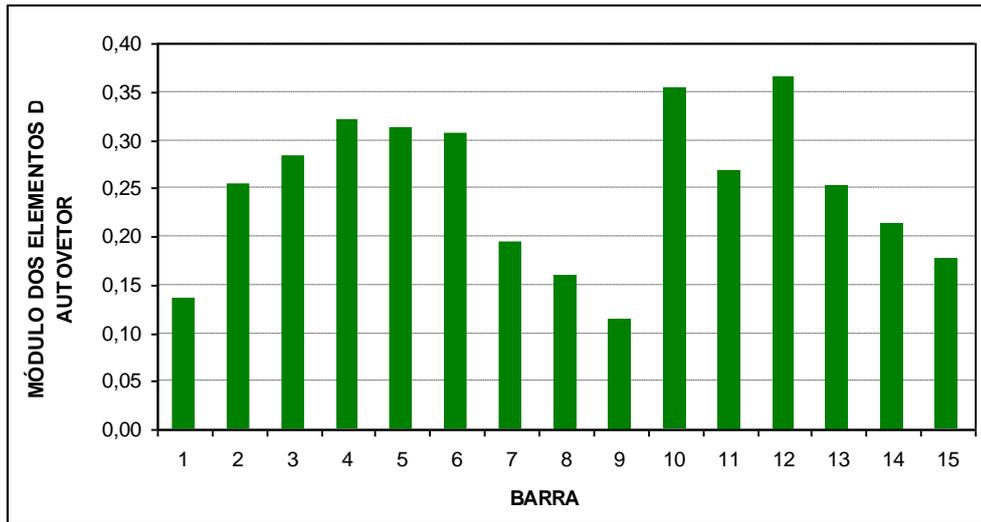


Figura 4.17 – Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância.

Assim como, para os autovalores da matriz admitância, tem-se que os autovetores também identificam a barra de ótima alocação do banco de capacitores. Isto considerando-se que o Grau de Esparsidade da matriz admitância do sistema em análise tenha um valor relativamente elevado. No próximo tópico será mostrado que para sistemas elétricos cujas matrizes de admitância tenham um Grau de Esparsidade relativamente baixo, a barra de alocação ótima somente poderá ser identificada após o cálculo da Matriz de Sensibilidade [S].

Para o sistema em anel da figura 4.11, aqui analisado, os elementos da diagonal principal da matriz de sensibilidade são aqueles mostrados na figura 4.18.

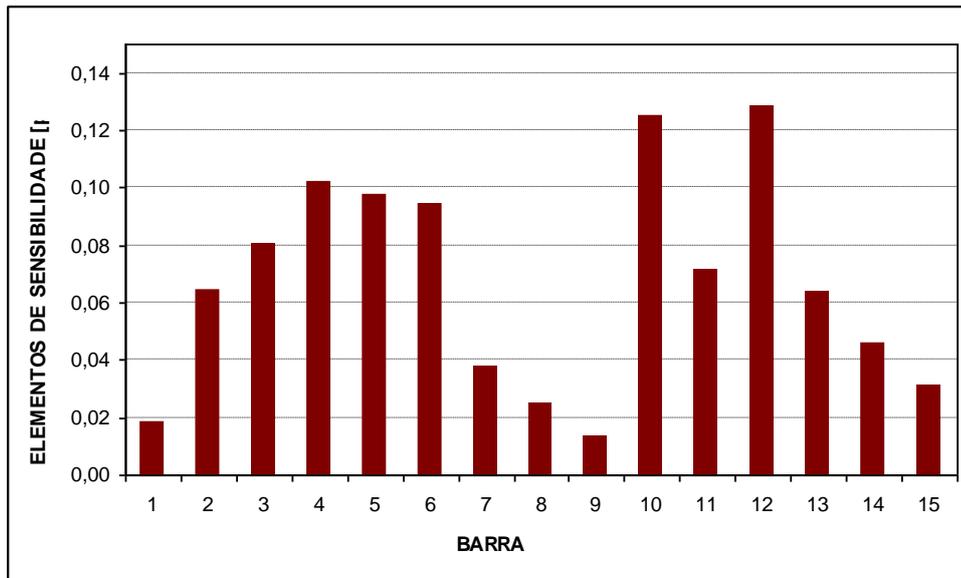


Figura 4.18 – Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade

Mais uma vez, a análise dos elementos da diagonal da matriz [S] indicam a barra de maior sensibilidade quando da alocação de elementos em derivação. Para o caso em estudo, a matriz da figura 4.18 indica que a barra 12 é a mais sensível de todo o sistema, portanto, resultará nas menores perdas elétricas na rede quando da alocação de um banco de capacitores neste ponto da rede.

Confrontando-se os resultados obtidos pela aplicação da TEIRE com os resultados obtidos no tópico anterior, que considerou uma metodologia empírica de análise, verifica-se a total congruência quanto à barra de ótima alocação do banco de capacitores de 10 MVar. Ainda, considerando-se somente a aplicação da TEIRE, verificou-se que a identificação da barra ótima foi possível em cada dos passos de sua execução. Em outras palavras, quando do cálculo dos autovalores da matriz admitância da rede, obteve-se o que menor autovalor era aquele associado à barra de número 12. Em seguida, quando do cálculo dos módulos dos autovetores associados ao autovalor de menor módulo, obteve-se o que maior elemento era aquele associado à barra de número 12 e, finalmente, quando do cálculo da diagonal principal da matriz de sensibilidade, obteve-se o maior valor associado também ao barramento de número 12.

Para ilustrar o exposto no último parágrafo, apresenta-se a seguir as curvas dos módulos das tensões médias nas barras, obtidas pelo método empírico; as curvas dos módulos dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo, assim como, dos módulos dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade de barra [S].

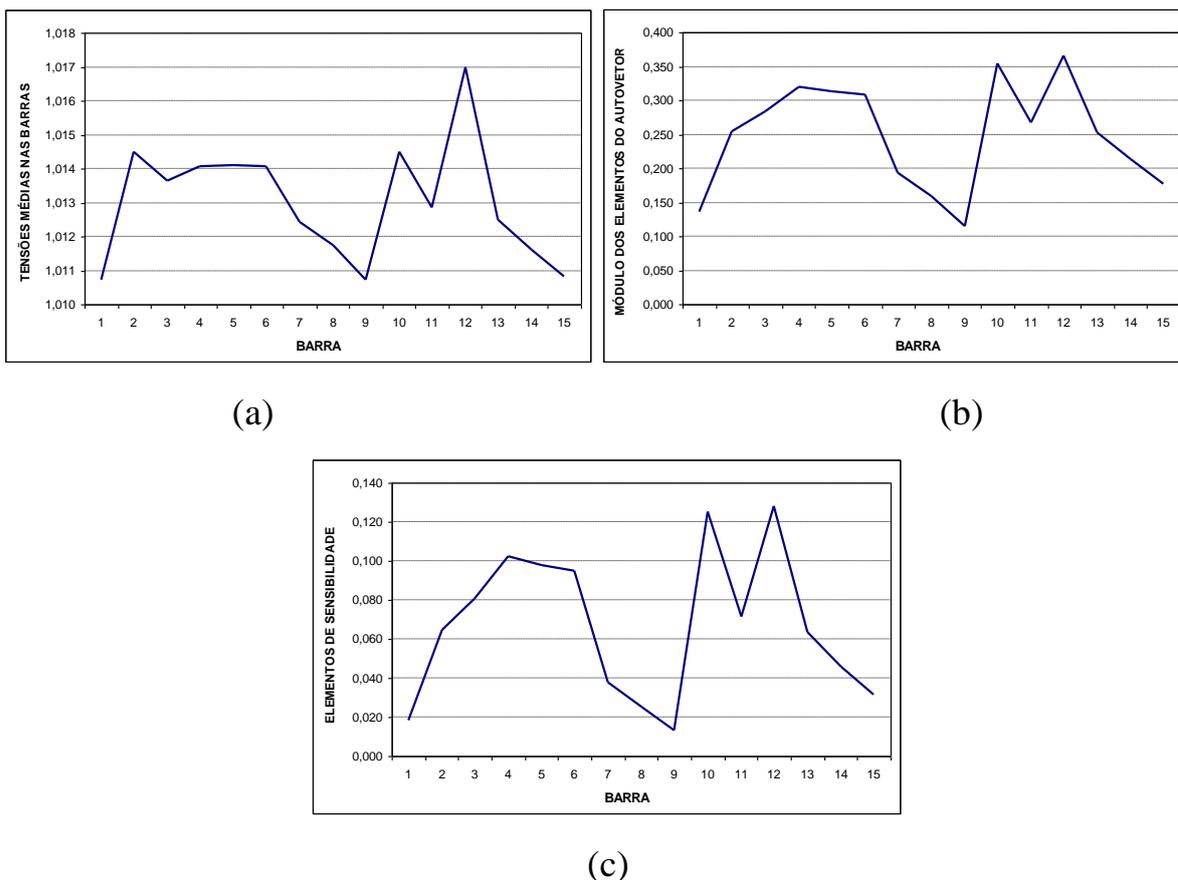


Figura 4.19 – Comparação entre os resultados encontrados. (a) Módulo das tensões médias nas barras obtidas por método empírico; (b) Módulo dos elementos do autovetor associado e (c) Módulo dos elementos de sensibilidade de barra.

Da análise da figura 4.19, pode-se mais uma vez verificar que para todos os casos tem-se um máximo valor associado à barra de número 12 e, também que as três curvas apresentam um “comportamento” muito semelhante.

No tópico seguinte, o sistema elétrico da figura 4.11 será modificado de forma a se obter um valor relativamente baixo de esparsidade da matriz de

Conforme pode ser observado pela figura 4.20, as novas linhas (representadas traço de maior espessura) interligam todo o sistema elétrico aumentando, conseqüentemente, os níveis de potência de curto-circuito em todos os barramentos. As tabelas 4.5 e 4.6, a seguir, apresentam os novos dados de barra e de linha para o sistema elétrico modificado

Tabela 4.5 – Dados de barra do sistema elétrico em anel modificado

BARRA	P _G [MW]	Q _G [MVA _r]	P _L [MW]	Q _L [MVA _r]
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	18,30	9,80
4	0,00	0,00	12,00	8,60
5	0,00	0,00	13,00	8,50
6	0,00	0,00	16,00	10,00
7	0,00	0,00	18,60	10,30
8	0,00	0,00	36,40	18,60
9	70,00	45,00	0,00	0,00
10	0,00	0,00	22,40	12,90
11	0,00	0,00	21,00	16,00
12	0,00	0,00	14,00	8,00
13	0,00	0,00	27,00	19,10
14	0,00	0,00	26,00	18,00
15	40,00	28,00	0,00	0,00

Tabela 4.6 – Dados de linha do sistema elétrico em anel modificado.

DA BARRA	PARA BARRA	R	X(60Hz)
1	2	0,00001	0,10000
2	3	0,01520	0,05750
2	4	0,05320	0,09850
3	4	0,03520	0,18520
3	11	0,09520	0,17100
3	14	0,08550	0,13600
4	5	0,01630	0,08760
2	5	0,04700	0,17370
5	6	0,01341	0,03790
5	7	0,01620	0,04350
5	10	0,20230	0,28210
6	7	0,04810	0,17630
7	8	0,01090	0,04140
8	9	0,01400	0,04200
8	10	0,06520	0,14500
10	11	0,01450	0,04730
12	14	0,08520	0,12500
4	10	0,06000	0,11200
6	10	0,20230	0,28210
4	11	0,04241	0,12320
10	12	0,01590	0,04990
12	13	0,18020	0,25240
11	14	0,03140	0,07460
13	14	0,02171	0,05950
14	15	0,01160	0,02362

Mais uma vez, tendo-se como objetivo principal a minimização das perdas elétricas ao longo das linhas do sistema, buscou-se, através da execução de sucessivos fluxos de carga, a barra para a qual a alocação de um banco de capacitores de 10 MVar minimizaria as perdas Joule no sistema.

Após a alocação do banco de capacitores em cada um dos barramentos individualmente, obteve-se os resultados mostrados na figura seguinte.

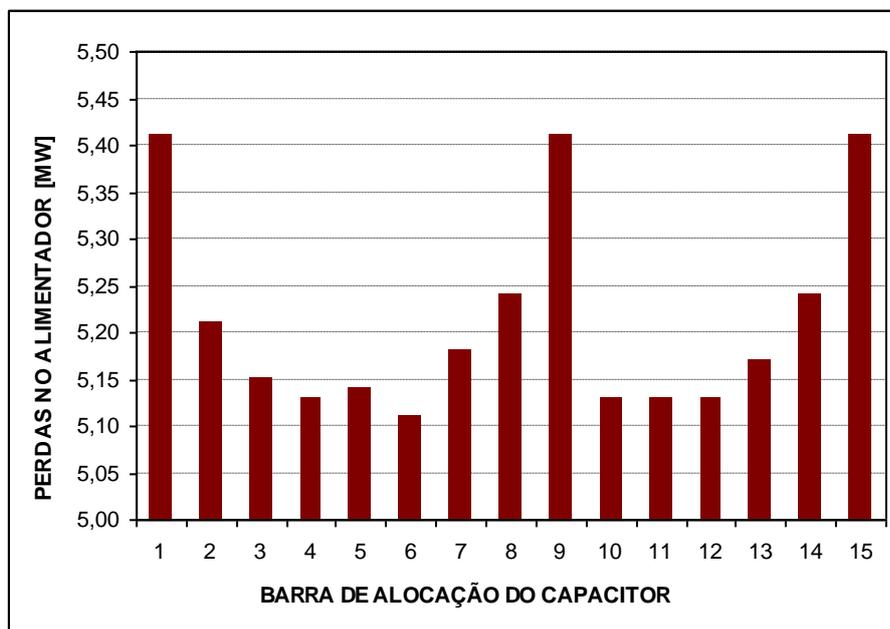


Figura 4.21 – Perdas Joule nas linhas do sistema elétrico x Barra de alocação do banco de capacitores.

Observando-se a figura 4.21, as menores perdas globais no sistema ocorrem quando da alocação da compensação reativa na barra de número 6, sendo esta, portanto, a barra ótima para alocação do banco de capacitores de 10 MVar.

Um outro parâmetro também analisado nos casos anteriores foi a variação entre a tensão anterior e a tensão posterior em cada barramento quando da alocação do banco de capacitores, conforme mostrado na figura 4.22.

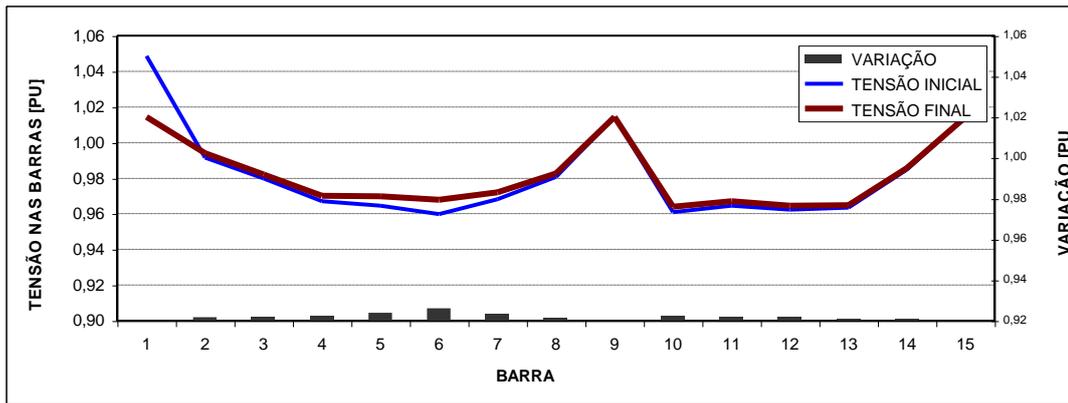


Figura 4.22 – Tensões nas barras antes e após a compensação reativa na barra 6

Pela observação da figura 4.22 observa-se que a variação da tensão em cada barramento tem um valor máximo quando da alocação do banco de capacitores na barra 6, em outras palavras, tem-se que o barramento de número 6 é aquele de maior sensibilidade, sob o aspecto da tensão, em todo o sistema elétrico.

No próximo tópico a TEIRE será aplicada ao problema de alocação do banco de capacitores ao sistema em anel modificado. A grande ressalva deste estudo é que tem-se agora um sistema com um Grau de Esparsidade relativamente baixo, em consequência do grande número de interligações entre os barramentos.

4.2.6) CASO C.2 – SISTEMA ELÉTRICO EM ANEL MODIFICADO – ANÁLISE ATRAVÉS DA TEIRE.

Considerando-se o sistema elétrico em anel modificado, tem-se que o mesmo apresenta um total de 225 elementos em sua matriz admitância, uma vez que são 15 (quinze) o número de barras existentes. De todos os seus elementos, um total de 160 são nulos, o que confere ao sistema um grau de esparsidade conforme mostrado a seguir.

$$GE[\%] = \frac{160}{15^2} \cdot 100 = 71,111\%$$

Onde $GE[\%]$ é o Grau de Esparsidade da matriz de admitâncias.

O Grau de Esparsidade [GE] encontrado para o sistema em anel modificado é o mais baixo dentre todos os casos analisados até o presente momento. Vale ressaltar que para sistemas elétricos com um número maior de barras, o GE pode apresentar valores de até 50%. Neste sentido, cabe aqui uma verificação do comportamento da TEIRE em sistema de baixas esparsidades da matriz admitância de rede.

Inicialmente, conforme o fluxograma da TEIRE mostrado na figura 4.1, calculou-se os autovalores da matriz admitância de rede associada ao sistema da figura 4.20. Os valores encontrados são mostrados na figura 4.23.

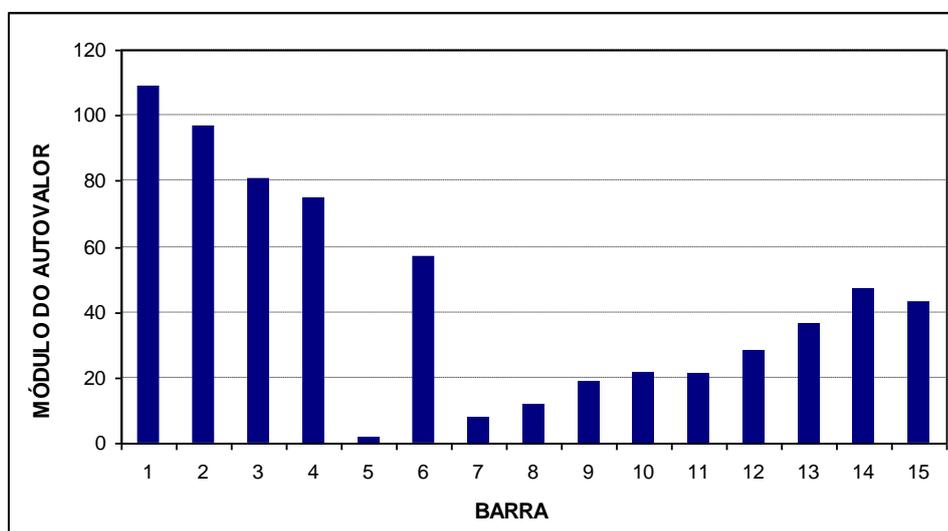


Figura 4.23 – Módulo dos autovalores da matriz admitância

A figura 4.23 mostra que o menor autovalor da matriz admitância de rede do sistema em anel modificado é aquele associado ao barramento de número 5. Isto mostra que, pela primeira vez nos estudos até aqui realizados, a análise dos autovalores não indicou diretamente a barra de ótima alocação do banco de capacitores, uma vez que de acordo com o Caso C.1 (análise através da execução de sucessivos fluxos de carga) a barra de ótima alocação da compensação reativa é a de número 6.

Da mesma forma que para os casos anteriores, analisa-se a seguir o comportamento dos módulos dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância de rede, conforme mostrado na figura 4.24.

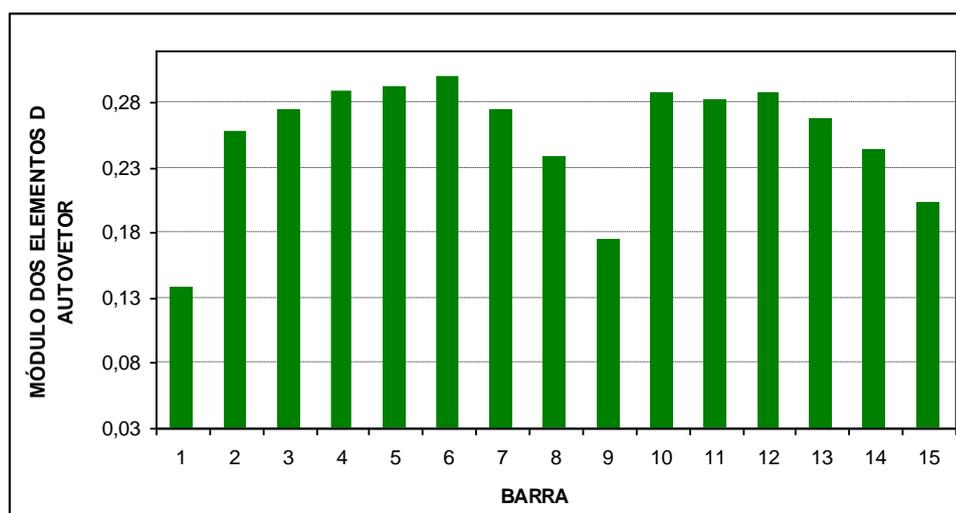


Figura 4.24 – Módulo dos elementos do autovetor associado ao autovalor de menor módulo da matriz admitância.

A análise da figura 4.24, diferentemente da análise dos autovalores, indica que a barra de número 6 é aquela cujo módulo do elemento do autovetor associado ao autovalor de menor módulo é o mais expressivo dentre as demais.

Finalmente, pela análise da Matriz de Sensibilidade de Rede [S], conforme mostrado na figura 4.25, obteve-se a barra de ótima alocação para o banco de capacitores considerado.

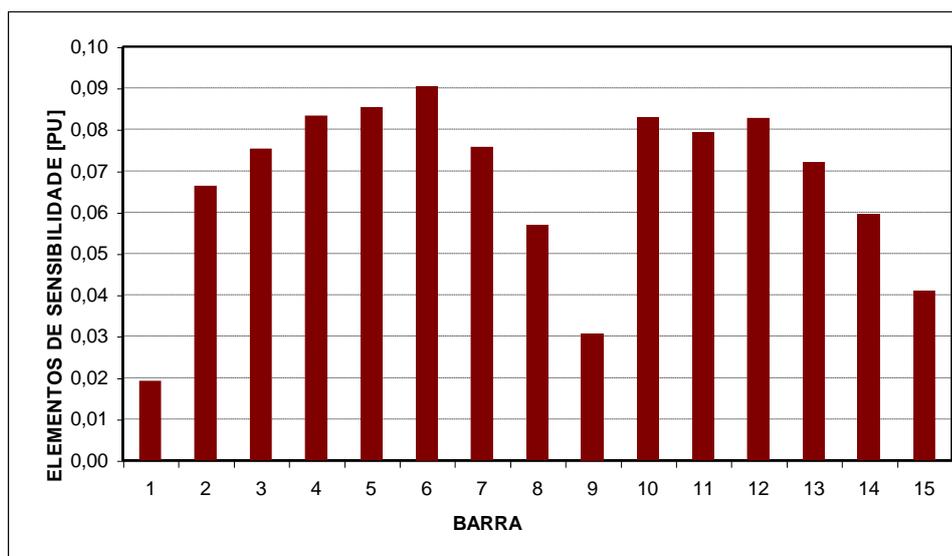


Figura 4.25 – Módulo dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade

A análise dos módulos dos elementos da diagonal principal da Matriz de Sensibilidade mostra que, assim como encontrado no Caso C.1, o barramento de número 6 é realmente aquele de ótima alocação para o banco de capacitores de 10 MVar, ou seja, a compensação reativa alocada nesta barra minimizará as perdas elétricas globais do sistema.

Conforme pode ser observado, a grande diferença entre o Caso C.2 em relação aos anteriores é que não foi possível a identificação da barra ótima logo na primeira etapa de aplicação da TEIRE, ou seja, no cálculo dos autovalores. No tópico seguinte este fato será analisado sob o enfoque do grau de esparsidade da matriz admitância de rede.

4.3 – CORRESPONDÊNCIA ENTRE A TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS E A ESPARSIDADE DA MATRIZ ADMITÂNCIA DE REDE DOS SISTEMAS ELÉTRICOS

A partir dos casos estudados no presente capítulo, apresenta-se a seguir uma contribuição à metodologia apresentada neste trabalho, no sentido de se identificar a correspondência entre a Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas e a esparsidade da matriz admitância de rede dos sistemas elétricos.

Neste aspecto, a tabela 4.7 mostra as correspondências entre todos os casos analisados neste capítulo.

Tabela 4.7 – Comparação entre os casos estudados

CASO	A	B	C	D	E
A.1	-	-	-	-	13
A.2	84,765%	13	13	13	13
B.1	-	-	-	-	12
B.2	78,222%	12	12	12	12
C.1	-	-	-	-	6
C.2	71,111%	5	6	6	6

A	GRAU DE ESPARSIDADE DA MATRIZ ADMITÂNCIA
B	BARRA ASSOCIADA AO AUTOVALOR DE MENOR MÓDULO
C	BARRA ASSOCIADA AO MENOR ELEMENTO DO AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR DE MENOR MÓDULO
D	BARRA ASSOCIADA AO ELEMENTO DE MAIOR MÓDULO DA DIAGONAL PRINCIPAL DA MATRIZ DE SENSIBILIDADE
E	BARRA DE ÓTIMA ALOCAÇÃO CONFORME MÉTODO EMPÍRICO

Conforme pode ser verificado pela análise da tabela 4.7, o único caso em que não houve congruência entre todas as grandezas estudadas foi o caso para o qual teve a matriz de admitância com o menor Grau de Esparsidade.

Da análise dos resultados obtidos, pode-se dizer que para sistemas de baixa esparsidade, como a maioria dos sistemas com topologia em anel, aconselha-se sempre concluir a metodologia proposta pela TEIRE, ou seja, continuar com os procedimentos do método até o cálculo da matriz de sensibilidade de rede [S] para, só então, identificar o barramento de ótima alocação tanto para capacitores quanto para filtros harmônicos.

Aconselha-se, ainda, que para sistemas com Grau de Esparsidade inferior à 60% seja utilizado um conjunto de barras com as maiores sensibilidades indicadas pela TEIRE.

De posse desse conjunto, que para um sistema de 100 barras, por exemplo, poderia ser composto pelas 5 (cinco) barras de maior sensibilidade do sistema, sugere-se a execução de metodologias tradicionais, como o método da “*tentativa e erro*” utilizado neste trabalho, para só então identificar a barra de ótima alocação para elementos em derivação.

Em se tratando de grandes sistemas elétricos, a redução de todas as barras a um conjunto muito reduzido de barramentos ainda significaria um grande avanço nos processos de alocação ótima de bancos de capacitores e filtros harmônicos.

4.4 – CONCLUSÃO

O presente capítulo apresentou a Teoria de Estruturas Inerente a Redes Elétricas como uma ferramenta simples e ao mesmo tempo muito poderosa para a alocação de bancos de capacitores em derivação nos sistemas elétricos de potência. Um aspecto de grande importância também abordado neste capítulo, foi a análise da correspondência entre a exatidão da TEIRE e o grau de esparsidade da matriz admitância de rede. Desta forma, verificou-se que a exatidão da TEIRE está diretamente relacionada ao Grau de Esparsidade da matriz de admitâncias dos sistemas elétricos analisados. Um Grau de Esparsidade elevado confere uma grande precisão à teoria. Por outro lado, um grau de esparsidade baixo, sugere que a teoria seja levada até o seu último estágio (cálculo da matriz de sensibilidade) e, ainda, que seja considerado um conjunto de barras candidatas ao ponto de ótima alocação de elementos em derivação na rede, ao invés de apontar diretamente a barra ótima como aquela associada ao elemento de maior módulo da diagonal principal da matriz de sensibilidade [S].

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA NOVOS TRABALHOS

O presente trabalho apresentou o desenvolvimento e a aplicabilidade de uma teoria desenvolvida durante a década de 60 e que, ainda hoje, pode ser de grande utilidade para solução de problemas atuais pertinentes aos sistemas elétricos de potência como, por exemplo, na alocação ótima de filtros harmônicos passivos. Trata-se da Teoria de Estruturas Inerentes à Redes Elétricas – TEIRE.

Inicialmente, buscou-se apresentar todas as particularidades e equacionamentos pertinentes à Teoria de Estruturas Inerentes à Redes Elétricas. Neste contexto, o capítulo 2 apresentou de forma clara e objetiva todos os aspectos matemáticos envolvendo autovalores e autovetores da matriz admitância de rede, a qual representa o principal subsídio para o desenvolvimento da TEIRE. Ao final do capítulo, a Teoria foi aplicada na busca do barramento de maior sensibilidade de um sistema elétrico radial, quando da conexão de um ramo *shunt* RLC.

O capítulo 3, por sua vez, apresentou a aplicação da TEIRE nos estudos de alocação ótima de filtros harmônicos passivos sintonizados, em alimentadores radiais de distribuição. Neste capítulo, cada passo da aplicação da TEIRE foi detalhadamente analisado de forma a se identificar todas as suas particularidades. Todas as matrizes e vetores envolvidos no processo foram mostrados e associados ao seu respectivo significado físico. Ao final do capítulo

3 o problema foi também resolvido utilizando a metodologia empírica de tentativa e erro, de modo a confrontar os resultados obtidos com aqueles apresentados pela utilização da TEIRE.

A alocação ótima de bancos de capacitores, visando-se a minimização das perdas elétricas em sistemas elétricos, foi o enfoque do capítulo 4. Neste capítulo foram analisados 6 (seis) casos práticos de aplicação da teoria. O objetivo principal do capítulo era analisar a precisão e a confiabilidade da TEIRE para sistemas de topologias variadas, e com diferentes Graus de Esparsidade de suas matrizes de admitância de rede. Inicialmente, o estudo referiu-se à alocação ótima de um banco de capacitores em um alimentador de distribuição. Tratando-se de um sistema de alta esparsidade, os resultados apresentados foram muito precisos quando comparados aos resultados obtidos por método empírico. Após a análise do alimentador de distribuição através da TEIRE e, posteriormente, pelo processo empírico tradicional, analisou-se o problema da alocação ótima de um banco de capacitores em um sistema de subtransmissão de energia elétrica. Mesmo apresentando um Grau de Esparsidade de sua matriz admitância inferior ao do alimentador da distribuição analisado no caso anterior, a TEIRE também apresentou bons resultados quando comparados ao processo empírico de análise.

Até este ponto, verificou-se que, para sistemas cujas matrizes de admitância de rede apresentassem níveis elevados de esparsidade, a metodologia de aplicação da TEIRE podia ser encerrada logo na primeira etapa de sua formulação, mais especificamente, logo após o cálculo dos autovalores da matriz admitância. Concluiu-se também que, para sistemas com Grau de Esparsidade elevados, o menor autovalor da matriz admitância de rede era exatamente aquele associado ao barramento ótimo para conexão de bancos de capacitores.

Com o propósito de verificar se esta constatação seria também válida para sistemas com grande número de interligações e, conseqüentemente, baixos valores relativos de esparsidade, modificou-se o sistema de subtransmissão

utilizado no caso anterior, de forma a obter-se uma matriz admitância com um grau de esparsidade consideravelmente inferior aos obtidos até o presente momento.

A análise deste novo sistema, com topologia muito mais interligada, mostrou que, para sistemas de baixa esparsidade, a TEIRE deve ser desenvolvida até seu último passo, ou seja, até a montagem da matriz de sensibilidade de barra, a qual indicará o barramento de ótima alocação para bancos de capacitores. Conclui-se, ainda, considerando-se a simplicidade matemática da metodologia, que deve-se definir um conjunto de barras candidatas à ótima alocação, para que, posteriormente, a barra efetivamente ótima seja identificada através de metodologias tradicionais. Considerando-se um sistema de 100 barras, por exemplo, poderia-se selecionar os cinco barramentos mais sensíveis para alocação de bancos de capacitores e, em seguida, utilizar a metodologia da tentativa e erro para identificação da barra efetivamente ótima dentre as cinco candidatas. Esta tratativa é sugerida apenas para sistemas de baixa esparsidade. Nos sistemas radiais, por exemplo, é suficiente a aplicação da TEIRE para identificação direta da barra de maior sensibilidade do sistema elétrico.

Basicamente, o trabalho apresentou duas das aplicações da Teoria de Estruturas Inerentes à Redes Elétricas nos sistemas de potência, a alocação ótima de filtros harmônicos passivos e de banco de capacitores. Dessa forma, sugere-se que, em trabalhos futuros, a TEIRE seja analisada quanto à sua aplicação aos processos de identificação de barras de ótima alocação para cargas elétricas sensíveis aos afundamentos momentâneos de tensão. Uma outra sugestão para trabalhos posteriores, seria a verificação do significado físico das partes real e imaginária dos autovalores e autovetores da matriz admitância de rede dos sistemas elétricos, uma vez que no presente trabalho foi analisado somente o significado físico dos módulos destas grandezas, conferindo à metodologia um caráter estritamente qualitativo.

A comprovação da aplicabilidade da TEIRE neste processo forneceria uma ferramenta muito útil para a solução de um dos maiores problemas da atualidade para as distribuidoras de energia elétrica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - M. A. LAUGHTON, M. A. EL-ISKANDARANI, “*On the Inherent Network Structure*”, Proceedings of 6th PSCC, Darmstad, August 1978, pp. 185-196.
- [2] – CARPINELLI, G., RUSSO, M., VERDE, P., “*On the optimum placement of passive filters*”, Proceedings of the 7th International Conference PEMC’96, Budapest, Hungary, September 1996, pp. 333-338.
- [3] - CARPINELLI, G., RUSSO, M., RUSSO, M., VERDE, P., “*Inherent Structure Theory of networks and power system harmonics*”, IEE Proc. Gener. Transm. Distrib., Vol. 145, No. 2, March 1998.
- [4] - M. A. LAUGHTON, “*The structure of power network voltage profiles*”, Proceedings of 7th PSCC, Lausanne, July 1982, pp. 845-851.
- [5] – PESONEN, M. A. et al., “*Harmonics, characteristic, parameters, methods of study, estimates of existing values in the network*”, Electra, No. 77, July 1981.

- [6] - M. A. LAUGHTON, “*Sensitivity in dynamical system analysis*”, J. Electron. Control, 1964, 17, pp. 577-591.
- [7] - PRETELT, A. M., “*Automatic allocation of network Capacitors*”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-90, No. 1, January/February 1971.
- [8] – BARAN, M. E., WU, F. F, “*Optimal capacitor placement on radial distribution systems*”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 4, No. 1, January 1989.
- [9] – GRAINGER, J. J., LEE, S. H., “*Optimum size and location of shunt capacitors for reduction of losses on distribution feeders*”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 3, March 1981.
- [10] – CHIS, M., et al., “*Capacitor placement in distribution systems using heuristic search strategies*”, IEE Proc-Gener. Transm. Distrib., Vol. 144, No. 3, May 1997.
- [11] – A. M. ZAHEDI, A. E. EMANUEL, D. ZANINELLI, “*Optimum location and size of LC harmonic filters in feeders with uniformly distributed linear and nonlinear loads*”, Electric Power System Research Journal, Issue 2, Vol. 44, Feb. 1998, pp. 127-136.

APÊNDICE A

NOÇÕES DE ÁLGEBRA MATRICIAL

De um ponto de vista elementar, os vetores e as matrizes fornecem uma ferramenta bastante conveniente para sistematizar cálculos algébricos. Em engenharia elétrica, particularmente, os vetores e matrizes são utilizados constantemente para representar desde conjuntos de valores distintos, como tensões e correntes, até grandes sistemas elétricos sob o ponto de vista de sua topologia de impedâncias.

A.1 – DEPENDÊNCIA LINEAR DE VETORES

Um dos primeiros tópicos pertinentes à análise vetorial-matricial, diz respeito à dependência, ou independência, linear. Neste contexto, considere uma coleção de vetores coluna tendo, cada um, três elementos, tais como:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Em algumas circunstâncias, é comum representar esses vetores como consistindo-se de somas de múltiplos de certos vetores coluna básicos, de maneira que cálculos com vetores “gerais” possam ser reduzidos a cálculos presumivelmente mais simples, envolvendo somente os vetores básicos. Assim, definem-se os “vetores unitários” e_1 , e_2 e e_3 , como sendo nosso conjunto de vetores básicos.

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Dessa forma, o primeiro vetor em (A.1) pode ser representado como sendo igual a $e_1 - e_2$, o segundo, como sendo $e_1 + 4e_2 - 2e_3$ e, assim por diante. Em resumo, qualquer vetor coluna de dimensão 3×1 pode ser expresso como uma soma de múltiplos dos três vetores básicos. Os vetores básicos poderiam ser, para o caso tridimensional, a princípio, qualquer conjunto de vetores de três dimensões, como, por exemplo:

$$e'_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e'_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e'_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Partindo-se desses três vetores básicos, a fim de exprimir o primeiro vetor em (A.1) em função desses novos vetores básicos, tem-se que encontrar números α_1 , α_2 e α_3 tais que:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Da equação (A.4), resulta um sistema de equações com três incógnitas, cuja solução verifica-se ser $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = \alpha_3 = 1/2$. Portanto, o primeiro vetor de (A.1) pode ser escrito como sendo igual a $1/2(e'_2 + e'_3)$.

Existem certas ocasiões, entretanto, nas quais os vetores em (A.1) não podem mais ser escritos em termos de um determinado conjunto de vetores básicos. Para tanto, considere o conjunto de vetores básicos abaixo.

$$e''_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e''_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad e''_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Por exemplo, supondo-se que se tente exprimir o primeiro vetor em (A.1) em termos do conjunto de vetores básicos indicados acima, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Isso resulta em um conjunto de três equações e três incógnitas, como indicado abaixo.

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - \alpha_3 = -1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Isolando-se α_2 na primeira e terceira equações, e igualando-se as expressões obtidas, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 = \frac{1}{2} \\ \alpha_1 - \alpha_3 = -1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Estas equações, como se pode observar, são contraditórias. Dessa forma, verifica-se que não é possível exprimir o primeiro vetor em (A.1) em termos dos três vetores indicados em (A.5). De um ponto de vista mais fundamental, a razão para a dificuldade observada pode ser verificada diretamente dos vetores em (A.5), uma vez que $e_3'' = 2e_2'' - e_1''$. Como objetiva-se exprimir vetores como sendo um somatório de múltiplos dos vetores básicos mas, em contrapartida, tem-se que um dos próprios vetores básicos pode ser expresso em termo dos outros dois, não faz sentido incluí-lo no conjunto. Sob este aspecto, está-se tentando exprimir os vetores em (A.1) como soma de múltiplos de somente dois vetores, e_1'' e e_2'' . Isso não será, em geral, possível, pois envolverá um conjunto de três equações e duas incógnitas.

Neste momento, é bastante apropriado a introdução da definição de *conjunto de vetores linearmente dependentes*.

Diz-se que um conjunto de vetores v_1, v_2, \dots, v_n é *linearmente dependente* se existem números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \tag{A.9}$$

Se o conjunto não é *linearmente dependente*, diz-se que o mesmo é *linearmente independente*.

Por exemplo, os três vetores em (A.5) formam um conjunto linearmente dependente, pois verifica-se que $e_1'' - 2e_2'' + e_3'' = 0$. Por outro lado, o conjunto de vetores apresentado em (A.3) é linearmente independente, conforme pode ser observado pela expressão seguinte.

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

A equação vetorial dada em (A.10) pode ser rescrita de modo a formar um sistema de equações, como já observado anteriormente. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \tag{A.11}$$

Verifica-se, prontamente, que a única solução para o sistema de equações indicadas em (A.11), é $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, de maneira que o conjunto dos três vetores indicados em (A.3) é linearmente independente.

Uma outra maneira, mais simples, de se verificar a dependência linear de um conjunto de vetores é através do determinante da matriz do conjunto de vetores analisados. A matriz em questão, aqui designada por A , é a matriz $n \times n$ cuja i -ésima coluna é formada pelas componentes do vetor e_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Assim, para o conjunto de vetores representados em (A.3), por exemplo, ter-se-ia a seguinte matriz correspondente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Com o uso da matriz A , pode-se dizer que a condição necessária e suficiente para a independência linear do conjunto de vetores e_i ($i = 1, 2, \dots, n$) é que $\det(A) \neq 0$, ou seja, o determinante da matriz A não deve ser nulo.

Desse modo, para os vetores representados em (A.3), temos que o determinante da matriz A , indicada em (A.12), é diferente de zero e igual a -8 . Isto implica que o conjunto de vetores indicados em (A.3) é *linearmente independente*, conforme já verificado anteriormente.

Considerando-se, por outro lado, o conjunto de vetores representados em (A.5), associa-se aos mesmos a seguinte matriz de correspondência:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

O determinante da matriz A' , indicada em (A.13) e que representa o conjunto de vetores representados em (A.5), é nulo. Assim, de acordo com o exposto anteriormente, constata-se que o conjunto de vetores em análise é *linearmente dependente*, conforme já constatado.

O conhecimento da dependência, ou independência, linear de um conjunto de vetores será de grande utilidade na compreensão da Teoria Inerente à Estrutura.

A.2 – NORMAS DE VETORES

Em várias circunstâncias é importante ter alguma noção do “tamanho” de um vetor, não no sentido do número de elementos do mesmo mas, da magnitude de seus componentes.

Em se tratando de comprimentos geométricos, ter-se-ia que, para um vetor genérico \mathbf{x} , de duas dimensões, seu comprimento seria calculado pelo Teorema de Pitágoras, como sendo $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$. Em três dimensões, o equacionamento análogo seria $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}$. De uma maneira geral, para um vetor de n -dimensões, o cálculo de seu comprimento resultaria em $\sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)}$. Entretanto, para se medir “tamanhos”, existem outras maneiras possíveis que podem ser mais naturais para uma determinada situação. Por exemplo, se n for grande (para o caso n -dimensional), o procedimento de cálculo exposto acima poderia fazer com que um vetor cujas componentes fossem todas “pequenas” tivesse um “tamanho” grande, talvez contradizendo a interpretação que é apropriada na situação específica.

Para ilustrar a idéia de “tamanho” de vetores, considere a equação vetorial abaixo:

$$[V] = [Z] \cdot [I] \tag{A.14}$$

onde,

$$[V] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \text{ vetor de incógnitas;}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ matriz de constantes fixas;}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}, \text{ vetor de variáveis.}$$

Desse modo, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{A.15}$$

De posse de dois vetores de variáveis distintos, por exemplo, como os apresentados abaixo,

$$[I_1] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [I_2] = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{A.16}$$

qual seria aquele que proporcionaria um vetor $[V]$ de maior “tamanho” ?

Neste ponto do encaminhamento, torna-se bastante oportuno a introdução do termo *norma de vetores*, em substituição ao termo genérico “tamanho”, utilizado até então.

Assim, tem-se que uma *norma vetorial* de um dado vetor x é um número real denotado por $\|x\|$, que obedeça às seguintes condições:

- (a) $\|x\| > 0$ para $x \neq 0$, e $\|x\| = 0$ exatamente quando $x = 0$;
- (b) $\|k \cdot x\| = |k| \cdot \|x\|$, para qualquer escalar k ;
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

A terceira condição (c) é chamada desigualdade triangular, uma vez que a mesma é a generalização do fato de que o comprimento de qualquer lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois lados.

Existem diversos equacionamentos diferentes para se quantificar às normas de vetores comumente utilizadas na literatura, entretanto, os mais pertinentes à utilização na solução de problemas relacionados à engenharia elétrica são apresentados a seguir:

$$\|x\| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \tag{A.17}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2} \tag{A.18}$$

$$\|x\|_\infty = \max |x_i| \tag{A.19}$$

A equação (A.18) é generalizada para as demais dimensões, como sendo

$$\|x\|_p = \left[\sum_i |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad (\text{A.20})$$

Para o caso particular onde $p = 2$, tem-se a denominação de *Norma Euclidiana*, de grande importância nos estudos relacionados aos sistemas elétricos de potência.

Tem-se, ainda, que a igualdade apresentada em (A.19) equivale a se obter o elemento do vetor x que possui o maior módulo, sendo esta também de grande importância nos estudos relacionados à engenharia elétrica.

Retornando-se, nesse momento, à equação vetorial apresentada em (A.15) e à busca do vetor de variáveis $[I]$ que proporcionará o vetor $[V]$ de maior norma, tem-se que, utilizando-se o vetor $[I_1]$, o vetor $[V]$ resultante será igual a:

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,5 \end{bmatrix}$$

cuja norma, de acordo com a definição (A.18), seria $\|V\|_2 = 4,5$.

Por outro lado, utilizando-se o vetor $[I_2]$ como vetor de variáveis, ter-se-ia um vetor $[V]$ resultante dado por,

$$[V] = \begin{bmatrix} -5,5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cuja norma, também de acordo com a definição (A.18), seria $\|V\|_2 = 7,4$.

Dessa forma, em resposta ao questionamento anterior, a utilização do vetor $[I_2]$ proporciona um vetor $[V]$ de maior norma. Um fato importante é que apesar disto, esse mesmo vetor $[I_2]$ possui uma norma, de acordo com (A.18), menor que a do vetor $[I_1]$, ao contrário do que se podia esperar. Conclui-se, assim, que o vetor $[V]$ de maior norma não é obtido, necessariamente, quando da utilização do vetor de variáveis $[I]$ cuja norma tem maior magnitude.

APÊNDICE B

EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS

B.1 – RELAÇÕES ENTRE OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DAS MATRIZES DE ADMITÂNCIAS E DE IMPEDÂNCIAS

O entendimento matemático das equações (2.24) e (2.33), apresentadas na capítulo 2, requer a análise da correspondência entre autovalores e autovetores das matrizes de admitâncias e de impedâncias da rede.

Para tanto, considere a matriz de admitâncias representativa de um sistema elétrico exemplo de duas barras, apresentada em (B.1).

$$Y = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

A matriz de impedâncias do sistema, como se sabe, será a inversa da matriz de admitâncias. Assim, tem-se que:

$$Z = Y^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Com o intuito de verificar a correspondência entre os autovalores das matrizes de admitâncias e de impedâncias, calculam-se os mesmos para cada matriz individualmente.

Para o cálculo dos autovalores da matriz de admitâncias utiliza-se a equação característica (B.3) - também apresentada em (2.4).

$$\det(Y - \lambda I) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Dessa forma, para a matriz Y , tem-se:

$$\det \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1/2-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Resultando, dessa forma, nos autovalores λ_1 e λ_2 da matriz admitância, apresentados em (B.5), abaixo.

$$\lambda_1 = 0,2808 \text{ e } \lambda_2 = -1,7808 \quad (\text{B.5})$$

Utilizando-se, ainda, a equação característica (B.3), calculam-se os autovalores para a matriz de impedâncias. Os autovalores da matriz de

impedâncias será representado pelo símbolo μ , em correspondência ao símbolo λ , utilizado para a matriz admitância.

Assim, tem-se que:

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{bmatrix} 1-\mu & 2 \\ 2 & 2-\mu \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{B.6})$$

De onde resulta os autovalores μ_1 e μ_2 da matriz impedância, apresentados em (B.7).

$$\mu_1 = 3,5616 \text{ e } \mu_2 = -0,5616 \quad (\text{B.7})$$

Da observação dos autovalores da matriz impedância, nota-se que os mesmos são os inversos dos autovalores da matriz admitância. Desse modo, pode-se escrever:

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1} \text{ e } \mu_2 = \frac{1}{\lambda_2} \quad (\text{B.8})$$

Em seguida, para se calcular os autovetores da matriz admitância, utiliza-se a equação (B.9) - também apresentada no capítulo 2 em (2.3).

$$(Y - \lambda I)\theta = 0 \quad (\text{B.9})$$

Dessa forma, para a matriz Y , e considerando-se o autovalor λ_l , tem-se:

$$\left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} - \lambda_{l1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

De onde, efetuando-se as operações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} -1,2808 & 1 \\ 1 & -0,7808 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Resolvendo-se o sistema de equações apresentado em (B.11), resulta o autovetor θ_l da matriz Y - apresentado em (B.12) - associado ao autovalor λ_l . Dessa forma, tem-se:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0,7808 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Procedendo-se de modo análogo, determina-se a seguir o autovetor θ_2 associado ao autovalor λ_2 da matriz admitância. Como resultado, tem-se:

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} -1,2808 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

Para se calcular os autovetores da matriz impedância, por sua vez, utiliza-se o mesmo procedimento utilizado para o cálculo dos autovetores da matriz admitância. Assim, a partir da equação (B.9), tem-se, para a matriz Z , e considerando-se inicialmente o autovalor μ_1 :

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

De onde, efetuando-se as operações, resulta:

$$\begin{bmatrix} -2,5616 & 2 \\ 2 & -1,5616 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Os autovetores da matriz de impedâncias, será representado pelo símbolo Ω , em correspondência ao símbolo θ , utilizado para a matriz admitância.

Resolvendo-se o sistema de equações apresentado em (B.15), resulta o autovetor Ω_1 da matriz $[Z]$ - apresentado em (B.16) - associado ao autovalor μ_1 . Dessa forma, tem-se:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0,7808 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Procedendo-se de modo análogo, determina-se a seguir o autovetor Ω_2 associado ao autovalor μ_2 da matriz impedância. Como resultado, tem-se:

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} -1,2808 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

Como pode ser observado, os autovetores da matriz de impedâncias, mostrada em (B.2), são exatamente os mesmos correspondentes a matriz de admitâncias, dada em (B.1). Ou seja,

$$\theta_1 = \Omega_1 \quad \text{e} \quad \theta_2 = \Omega_2 \quad (\text{B.18})$$

Pode-se dizer, portanto, que os autovetores de uma matriz admitância são iguais aos da matriz impedância. Apesar de seus autovalores serem inversos.

Estas constatações serão de significativa utilidade da demonstração matemática das equações (2.24) e (2.33) apresentadas no capítulo 2, e que representam a essência da Teoria Inerente à Estrutura.

B.2 – DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA DAS EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DA TEORIA DE ESTRUTURAS INERENTES A REDES ELÉTRICAS

A Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas consiste-se, essencialmente, na representação das matrizes de admitâncias e de impedâncias em termos de seus respectivos autovalores e autovetores. Assim, considerando-se a representação matemática indicada em [3], rescreve-se inicialmente a matriz Y de acordo com a equação (B.19).

$$Y = (P).diag(\lambda)(P)^{-1} \quad (B.19)$$

Onde,

Y = matriz admitância da rede;

$diag(\lambda)$ = matriz diagonal de autovalores da matriz Y ;

P = matriz de transição, cujas colunas são os autovetores da matriz Y .

A relação apresentada em (B.19) é facilmente extraída através de igualdades originadas da equação (B.9). Estas igualdades são apresentadas em (B.20), a seguir.

$$\begin{aligned} (Y - \lambda_1 \cdot I) \cdot \theta_1 &= 0 \Rightarrow Y = \lambda_1 \cdot \theta_1 \\ (Y - \lambda_2 \cdot I) \cdot \theta_2 &= 0 \Rightarrow Y = \lambda_2 \cdot \theta_2 \\ (Y - \lambda_3 \cdot I) \cdot \theta_3 &= 0 \Rightarrow Y = \lambda_3 \cdot \theta_3 \\ &\dots\dots\dots \\ (Y - \lambda_n \cdot I) \cdot \theta_n &= 0 \Rightarrow Y = \lambda_n \cdot \theta_n \end{aligned} \quad (B.20)$$

A soma dos segundos membros das igualdades (B.20) pode ser escrita como se segue, em (B.21).

$$\lambda_1.\theta_1 + \lambda_2.\theta_2 + \dots + \lambda_n.\theta_n = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Da equação (2.1), apresentada no capítulo 2, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} Y.\theta_1 &= \lambda_1.\theta_1 \\ Y.\theta_2 &= \lambda_2.\theta_2 \\ &\dots \\ Y.\theta_n &= \lambda_n.\theta_n \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Essas n equações, apresentadas em (B.22), podem ser combinadas como se segue:

$$Y.[\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] = \lambda_1.\theta_1 + \lambda_2.\theta_2 + \dots + \lambda_n.\theta_n \quad (\text{B.23})$$

E, substituindo-se (B.23) em (B.21), resulta:

$$Y \cdot [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \dots \\ \dots & & \dots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Considerando-se a matriz de transição $P = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]$, pode-se escrever a equação (B.24) na forma apresentada em (B.25).

$$Y \cdot P = P \cdot \text{diag}(\lambda) \quad (\text{B.25})$$

E, ainda, isolando-se a matriz Y do lado esquerdo da igualdade (B.25), tem-se, finalmente a equação fundamental da Teoria Inerente à Estrutura, apresentada novamente em (B.26).

$$Y = P \cdot \text{diag}(\lambda) \cdot P^{-1} \quad (\text{B.26})$$

Para a representação da matriz de impedâncias em termos de seus autovalores e autovetores, considere a equação (B.27), similar à equação (B.26).

$$Z = P \cdot \text{diag}(\mu) \cdot P^{-1} \quad (\text{B.27})$$

Lembrando-se das conclusões obtidas na seção anterior, tem-se que os autovalores das matrizes admitância e impedância são inversos e seus autovetores são idênticos. Assim, considerando-se, inicialmente, os autovalores, pode-se escrever que $diag(\mu) = diag(1/\lambda)$.

Em relação aos autovetores, foi verificado na seção B.1 que os autovetores de uma matriz admitância serão os mesmos da matriz impedância correspondente. Desse modo, tem-se que a matriz de transição P será a mesma tanto para a matriz Y quanto para a matriz Z .

Com base nestas considerações, pode-se, portanto, rescrever a equação (B.27) do seguinte modo:

$$Z = P \cdot diag(1/\lambda) \cdot P^{-1} \quad (B.28)$$

A última das equações fundamentais da TEIRE a ser verificada, é a equação da matriz $[S]$ de sensibilidade para autovalores. O significado desta matriz, como já mencionado no capítulo 2, foi descoberto por M. A. Laughton [6]. Para a demonstração matemática da igualdade apresentada em (2.49) - aqui rerepresentada em (B.29) - parte-se da equação (B.24). Nesta equação, isolando-se a matriz $diag(\lambda)$ no lado direito da igualdade, tem-se a equação (B.30).

$$S_n = \theta_n \cdot (\theta_n)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{11}} & \dots & \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{1N}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{N1}} & \dots & \frac{\partial \lambda_n}{\partial y_{NN}} \end{bmatrix} \quad (B.29)$$

$$P^{-1}.Y.P = \text{diag}(\lambda) \quad (\text{B.30})$$

Nesse momento, é extremamente oportuno relembrar a composição da matriz P . Esta matriz, conforme mencionado anteriormente, possui como colunas os autovetores da matriz Y considerada, conforme indicado em (B.31).

$$P = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] \quad (\text{B.31})$$

Partindo-se, agora, da teoria fundamental para autovalores e autovetores apresentada no capítulo 2, tem-se que:

$$[Y - \lambda_i.I]\theta_i = 0 \quad (\text{B.32})$$

Onde I é a matriz identidade.

Na equação (B.32), para pequenas variações (ΔY) na matriz Y , poder-se-ia escrever:

$$[Y + \Delta Y - (\lambda_i + \Delta\lambda_i).I][\theta_i + \Delta\theta_i] = 0 \quad (\text{B.33})$$

Considerando-se, ainda, que a matriz identidade I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, tem-se:

$$Y.\theta_i + \Delta Y.\theta_i - \lambda_i.\theta_i - \Delta\lambda_i.\theta_i + Y.\Delta\theta_i + \Delta Y.\Delta\theta_i - \lambda_i.\Delta\theta_i - \Delta\lambda_i.\Delta\theta_i = 0 \quad (\text{B.34})$$

Ou, ainda:

$$Y.\theta_i + \Delta Y.\theta_i + Y.\Delta\theta_i + \Delta Y.\Delta\theta_i = \lambda_i.\theta_i + \Delta\lambda_i.\theta_i + \lambda_i.\Delta\theta_i + \Delta\lambda_i.\Delta\theta_i \quad (\text{B.35})$$

Lembrando-se que $Y.\theta = \lambda.\theta$ - equação (2.1) da teoria fundamental para autovalores e autovetores - resulta:

$$\Delta Y.\theta_i + Y.\Delta\theta_i = \Delta\lambda_i.\theta_i + \lambda_i.\Delta\theta_i \quad (\text{B.36})$$

Multiplicando-se os dois lados da igualdade (B.36) por θ_i^T , tem-se:

$$\theta_i^T.\Delta Y.\theta_i + \theta_i^T.Y.\Delta\theta_i = \theta_i^T.\Delta\lambda_i.\theta_i + \theta_i^T.\lambda_i.\Delta\theta_i \quad (\text{B.37})$$

Ainda da equação (2.1), pode-se dizer que:

$$\theta_i^T.Y.\Delta\theta_i = \theta_i^T.\lambda_i.\Delta\theta_i \quad (\text{B.38})$$

Substituindo-se (B.38) em (B.37), resulta:

$$\theta_i^T.\Delta Y.\theta_i = \theta_i^T.\Delta\lambda_i.\theta_i \quad (\text{B.39})$$

A partir desta última equação e tendo-se em mente que $\theta_i^T \cdot \theta_j = 1$ sempre que $i = j$, e este é o caso da equação (B.39), pode-se escrever, finalmente:

$$\theta_i^T \cdot \Delta Y \cdot \theta_i = \Delta \lambda_i \quad (\text{B.40})$$

Considerando-se, agora, apenas um elemento específico nas matrizes e vetores da equação (B.40), tem-se:

$$(x_m^i)^T \cdot x_n^i = \frac{\Delta \lambda_i}{\Delta y_{m,n}} \quad (\text{B.41})$$

Onde:

$x_m^i = m$ -ésimo elemento do autovetor θ_i ;

$y_{m,n}$ = elemento da matriz Y .

Para variações infinitesimais de λ_i e $y_{m,n}$, pode-se ainda rescrever a equação (B.41) da seguinte forma:

$$(x_m^i)^T \cdot x_n^i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_{m,n}} \quad (\text{B.42})$$

Dessa forma, verificou-se a veracidade da equação para a matriz de sensibilidade apresentada em (B.29).

A equação (B.41) foi designada por M. A. Laughton como sendo a transposta da *matriz de sensibilidade para autovalores*, representada por S_n^T , de modo que se tenha:

$$S_n^T = \theta_n^T \cdot \theta_n \quad (\text{B.43})$$

Ou, finalmente:

$$S_n = \theta_n \cdot \theta_n^T \quad (\text{B.44})$$

Conclui-se, desta forma, as demonstrações matemáticas das equações fundamentais da Teoria de Estruturas Inerentes a Redes Elétricas.
